Exercice 1067 : (Raphaël)

Soit $f : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t}\, dt$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t} \right| = e^{-\pi x^2}$$

: $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est $\mathcal{C}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t,x) \mapsto e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t} \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\frac{\partial g}{\partial t} = -2i\pi x\, e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x, t \in \mathbb{R}^2$ $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x) \right| \leqslant \underbrace{2\pi |x| e^{-\pi x^2}}_{\underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}$

TDSAP f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
et $\forall t \in \mathbb{R}$ $f'(t) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t}\, dx$

(b) $i f'(t) = -2i\pi t f(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi x e^{-\pi x^2 - 2i\pi t x}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t\, e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi x - 2i\pi t)\, e^{-\pi x^2 - 2i\pi t x}\, dx$$

$$= \left[e^{-\pi x^2 - 2i\pi x t} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= 0$$

$$f' + 2\pi t f = 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = C e^{-\pi t^2},\quad C \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1 = C$$

$u = \sqrt{\pi}\, x$ $\quad$ $\mathcal{C}^1$, bijectif

$du = \sqrt{\pi}\, dx$ $\quad$ st $\nearrow$

$$\boxed{f : t \mapsto e^{-\pi t^2}}$$