Exercice 1066 (Raphaël)

1- Mq $E \not\subset L$

$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \notin L$

$\forall s > 0, \forall u \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{f(u)}{u+s} = \frac{1}{\sqrt{u}\,(u+s)} \underset{u \to 0^+}{\sim} \frac{1}{s\sqrt{u}}$$

$$\in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \qquad \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$$

donc $f \in E$

Mq $L \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \subsetneq E$

Soit $f \in L \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$

Soit $s > 0$

$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{f(u)}{u+s} \right| \leq \left| \frac{f(u)}{s} \right|$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $L \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \subsetneq E$

2- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, Soit $f_\alpha : u \longmapsto u^{\alpha-1}$

Soit $s > 0$

$$\frac{u^{\alpha-1}}{u+s} \underset{0}{\sim} \frac{u^{\alpha-1}}{s} \quad \text{et} \quad u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{u+s} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$$

donc $f_\alpha \in E \iff \begin{cases} \alpha - 2 < -1 \\ \alpha - 1 > -1 \end{cases} \iff 0 < \alpha < 1$

4- Soit $B \in E$ et $\hat{f} : s \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,du$

continuité :

Soit $\delta : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (s,u) \longmapsto \frac{f(u)}{u+s} \end{cases}$

- $\forall s \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \delta(s,u)$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$ $s \mapsto \delta(s,u)$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- hyp de domination : Soient $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall s,u \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$

$\frac{1}{u+s} \leq \frac{1}{u+a}$ donc $\left|\frac{f(u)}{u+s}\right| \leq \left|\frac{f(u)}{u+a}\right|$, intégrable et $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f continue sur $\mathbb{R}_+^*$

→ limite en $+\infty$: $g \begin{cases} [42,+\infty[\times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ s,u \longmapsto \frac{f(u)}{u+s} \end{cases}$

- $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$ $g(s,u) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$
- $\forall s \in [42,+\infty[$ $u \mapsto \delta(s,u)$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- hyp de domination : $\forall u,s \in [42,+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$

$$\left|\frac{f(u)}{u+s}\right| \leq \left|\frac{f(u)}{42+u}\right|$$

CCL : $\hat{f}(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$