donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} (-g(t)) \sin(xt)\,dt}$

c) D'après la seconde expression de F : $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$

$F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + C$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{\sin(xt)}{xt}\right| \leq 1$ où $h(t) = -g(t) = -G'(t)$

$\left|h(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right| \leq h(t) \times t$

<u>Trouver C</u> : On a $F(x) \xrightarrow[x\infty]{} C$

<u>Par les séries entières</u> : $G(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \frac{\sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{(-at)^k}{k!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-bt)^k}{k!}}{t}$

$G(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-a)^k - (-b)^k}{k!} t^{k-1}$

$= \sum_{k\geq 0} \frac{(-a)^{k+1} - (-b)^{k+1}}{(k+1)!} t^k$ DSE sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc intégrable au voisinage de 0

<u>Retour</u> : $h(t) \times t = -(b e^{-bt} - a e^{-at}) + \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$

en $+\infty$, on obtient $\boxed{C=0}$

<u>Ex 1063</u> Edgar

$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$

<u>a) Mq f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

On applique le TDSAPGVA.

Posons $g : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est C^∞

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-e^{-t}}{(x+t)^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-(-2)e^{-t}}{(x+t)^3}$ et ainsi $\frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t) = \frac{(-1)^j j! e^{-t}}{(x+t)^{j+1}}$, $\forall j \in \mathbb{N}$

• $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad t \mapsto \frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t) \in CM$ et $\in \mathcal{L}^1$

car $\left(\frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$

<u>Hyp de domination sur le segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$</u>

• $\forall x \in [a,b]$, $\forall j \in \mathbb{N}$ $\quad \left|\frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \frac{j!\, e^{-t}}{(a+t)^{j+1}}$

et $t \mapsto \frac{j!\, e^{-t}}{(a+t)^{j+1}} \in CM$ et $\in \mathcal{L}^1$

donc le théorème donne $\forall j$, $f \in C^j(\mathbb{R}_+^*)$

donc $\underline{f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)}$

2) <u>Équivalent en $+\infty$ et en 0^+</u>

<u>En $+\infty$</u> : Mq $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ $\qquad$ <u>1°</u> Mq $x f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1$

$$x f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-t}}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{x}}\, dt$$

On pose : $h(x,t) \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{x}}\, dt$

(i) $x \mapsto h(x,t) \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$

$t \mapsto h(x,t) \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$; $h(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-t}$

(iii) $\forall x, t$ $\quad |h(x,t)| \leq e^{-t}$

Donc on applique le TCD

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{x}}\right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

$$= 1$$

<u>CCL</u> $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

<u>En 0</u> :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt \quad \Big| \text{ chgt } \begin{array}{l} u = x+t \\ du = dt \end{array} \quad \begin{array}{l} t = 0 \Leftrightarrow u = x \\ t = +\infty \Leftrightarrow u \to +\infty \end{array}$$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\, du$$

$$f(x) = e^x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

$e^{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc on regarde $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$

$$F(x) = \int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

- $\frac{e^{-u}}{u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}$ et $\int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ DV (car $\frac{e^{-u}}{u} \sim \frac{1}{u}$)

donc $\int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{0}{\sim} \int_x^{1} \frac{1}{u}\,du$

$$\underset{0}{\sim} -\ln x$$

donc $F(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$

enfin $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)}$

3) On reprend $f'(x) = \int_0^{x} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$ (TDSAPGVL)

IPP :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$$

$$= -\left(\left[-\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{x+t}\,dt \right)$$

Les limites sont bien définies

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

d'où $\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x} + f(x)}$

Ex 997 Diane

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(nx)}$$

a) Domaine de définition

en $x=0$ $\frac{1}{ch^2(nx)} = 1$ donc f n'est pas définie en 0

en $x \neq 0$ $\frac{1}{ch^2(nx)} \begin{cases} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4}{e^{nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4}{e^{nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$