Ex 7056 : Diane

$f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$g : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{x^2}{\cos^2 u}}\,du$

a) Dérivabilité :

f : TFI

g : Th. dérivabilité d'$\int$ AP.

↳ hyp de dérivation :

$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^2 \quad |-2x\, e^{-x^2/\cos^2 u}| \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}\, e^{-2x}}_{\text{intégrable sur } [0,\frac{\pi}{4}]}$

$(f^2+g)' = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \int_0^{\pi/2} \frac{-2x}{\cos^2 u} e^{-x^2/\cos^2 u}\,du$

brouillon

$t^2 + x^2 = \frac{x^2}{\cos^2 u}$ ie $x^2 \underbrace{\left(1+\frac{1}{\cos^2 u}\right)}_{1+\tan^2 u} = -t^2$

$x^2 \tan^2(u) = t^2$

↳ on pose : $t = x \tan u$ (et $dt = \frac{x}{\cos^2 u}\,du$)

$\forall x, \quad (f^2+g)' = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) \times 2e^{-x^2} - \int_0^x 2e^{-(x^2+t^2)}\,dt$

$= 0$

b) $\forall x, \quad (f^2+g)(x) = (f^2+g)(0)$

$= \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$

TCD à ? cont.

$e^{-x^2\cos^2 u} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \quad \forall u \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$u \mapsto 0 \in \mathcal{C}M$, intégrable $\mathcal{C}M$, $u \mapsto e^{-x^2\cos^2 u}$ intégrable $\mathcal{C}M$

domination : $|e^{-x^2/\cos^2 u}| \leq e^{-2x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} g = 0$

$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$