$\boxed{1045}$ (William)

a) on pose $g : (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$

$g(\cdot,x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. $g(t,\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- En $x=0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ CV.

- Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$. Soit $A>0$. $\int_0^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{A}{\pi}\rfloor} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$.

Donc :

$$B = \int_0^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{A}{\pi}\rfloor} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$$

$u = t - k\pi$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor A/\pi\rfloor} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi} e^{-x(u+k\pi)}\,du$$

$$B = \sum_{k=0}^{\lfloor A/\pi\rfloor} v_k \quad \text{où } v_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)(-1)^k}{u+k\pi} e^{-x(u+k\pi)}\,du$$

$$v_k = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi} e^{-x(u+k\pi)}\,du$$

$$|v_k| \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)\, e^{-(k+1)x\pi}}{k\pi+\pi}\,du = \frac{e^{-(k+1)x\pi}}{k\pi+\pi} \times 2$$

Or $\frac{2e^{-(k+1)x\pi}}{\pi(k+1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ par minorant comparé. $(x<0)$

$\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge grossièrement donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$ DV.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{\sin t}{t} e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{x}{2}t}\right)$ et $t \mapsto e^{-\frac{x}{2}t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$

Donc par comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$ CV. donc $D_f = \mathbb{R}_+$

CamScanner로 스캔하기

f) Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^2)$ tq $\alpha < \beta$. Soit $(x, t) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}_+$.

$$|g(t,x)| = \left|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}\right| \leq \frac{e^{-tx}}{t} \leq \frac{e^{-t\alpha}}{t} \quad \text{or } \varphi_\alpha : t \longmapsto \frac{e^{-t\alpha}}{t}$$

$$\varphi_\alpha(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t\alpha}{2}}\right)$$

donc φ_α intégrable sur $[1, +\infty[$

En 0 : (Fagebaume).

on décompose : $f_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$. $f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

$$\left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| \leq \frac{|\sin t|}{t} \leq 1$$

intégrable sur $[0, 1]$

$\Rightarrow f_1$ continue sur $\mathbb{R}_+$.

VL : f_2 cont sur $]0, +\infty[$.

en 0 ? $\left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| \leq \frac{|\sin t|}{t}$ ↝ pas intégrable.

$$\int_1^{+\infty} \sin t \, \frac{e^{-xt}}{t} dt = \underbrace{\left[-\cos(t) \frac{e^{-xt}}{t}\right]_1^{+\infty}}_{\cos(1) e^{-x}} - \int_1^{\infty} \cos(t) \left[\frac{xe^{-xt} \, xt + e^{-xt}}{t^2}\right] dt$$

$$= K - \overbrace{\int_1^{\infty} \cos(t) \left[\frac{t x e^{-xt}}{t^2} + \frac{e^{-xt}}{t^2}\right] dt}^{f_3(x)}$$

$\varphi : u \longmapsto ue^{-u}$

$\varphi'(u) = (1-u)e^{-u}$

$0 \leq ue^{-u} \leq e^{-1}$

$\leq \frac{1}{t^2}(e^{-1} + 1) \Rightarrow f_3$ cont sur $\mathbb{R}_+$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

CamScanner로 스캔하기

c) $g(\cdot, x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. $g(x, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

et soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tq $\alpha < \beta$, $\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right| = |\sin t\, e^{-xt}| \leq e^{-\alpha t}$.

et $t \mapsto e^{-\alpha t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Donc par le th de dérivat° sous le signe $\int$ VL : $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

Mq $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} = f(0)$. Soit $x > 0$, $f'(x) = -\int_0^\infty \sin(t) e^{-xt}\, dt$

$$= -\left(\left[-\cos(t) e^{-xt}\right]_0^\infty - x \int_0^\infty \cos(t) e^{-xt}\, dt \right)$$

$$= -1 + x \int_0^\infty \cos(t)\, e^{-xt}\, dt = -1 + x\left[\left[\sin t\, e^{-xt}\right]_0^\infty + x\right.$$

$$\alpha = \int_0^\infty e^{it - xt}\, dt = \int_0^\infty e^{(i-x)t}\, dt = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{i-x}.$$

$\alpha = \frac{x+i}{1+x^2}$. d'où $f'(x) = -\operatorname{Im}(\alpha)$

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad x > 0$$

$f(x) = f(0) - \arctan(x)$. Mq $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$g(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et $t \mapsto 0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[$.

$|g(x,t)| \leq e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t} \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[)$

Donc TCD à paramètre continu : $\lim_{+\infty} f = 0$

et donc $f(0) = \frac{\pi}{2}$

CamScanner로 스캔하기