Exercice 1040 (Victor)

$$f(x) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - e^{-k(1+x^2)}\right)$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad g(x) = \ln(\overbrace{f(x)}^{>0})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\ln\left(1 - e^{-k(1+x^2)}\right)}_{u_k(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |u_k(x)| \sim \underbrace{e^{-k(x^2+1)}}$ tg d'une série CV

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Mq g est $\mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^1$

TDTAT VL : $\sum u_k$

- $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \; u_k'(x) = \dfrac{e^{-k(1+x^2)} \times 2xk}{1 - e^{-k(1+x^2)}}$

Soit $a < b$

On peut supposer $|b| > |a| \geq 0$

$\forall x \in [a,b], \; |u_k'(x)| \leq \dfrac{2|b|k e^{-k(1+x^2)}}{1 - e^{-k(1+x^2)}}$

$$\leq \frac{2bke^{-k}}{\underbrace{1 - e^{-1}}} \text{ tg d'une série CV}$$

$\Rightarrow \sum \|u_k'\|_\infty^{[a,b]}$ CV

$\sum u_k'$ CVN

$\Rightarrow g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-k(1+x^2)} \times 2xk}{1 - e^{-k(1+x^2)}}}$

MADE WITH Scanner App

$\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp(g(x)) \times g'(x)$

$$= \underbrace{\exp(g(x))}_{>0} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\overbrace{e^{-k(1+x^2)}}^{>0} \times 2kx}{\underbrace{1-e^{-k(1+x^2)}}_{>0}}$$

f est st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

f est st $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$

- limites de g : CVU : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_k(x)| \leq \overbrace{\ln(1-e^{-2k})}^{\text{tg d'une série CV}}$

$\sum u_k$ CVA donc CVU sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} u_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(1-e^{-k(1+x^2)}\right) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\prod_{1}^{+\infty}(1-e^{-kx})$	$\nearrow$	

TDL : $g(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$

MADE WITH Scanner App