Exercice 1029 (Théodore)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$$

1) $x=0$ $\sum$ dv

$x \neq 0$ $n \mapsto \frac{1}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Par CSA : $\sum$ cv

$\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$

Continuité : TΣFCVU (VL)

- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^*$, $|R_n| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ donc CVU

$\forall n$ $x \mapsto \frac{1}{1+(nx)^2}$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$

Donc f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$

(b) Mq $f \underset{\infty}{\sim} \frac{a}{x^2}$

$$f(x) = \frac{-1}{1+x^2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}}_{\Gamma(x)}$$

$\Gamma(x) \times (1+x^2)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

TDL sur $[2,+\infty[$

$$\Gamma(x) \times (1+x^2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+(nx)^2} \times (1+x^2)$$

$\left\| \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}(1+x^2) \right\|^{[2,+\infty[} \leq \frac{5}{1+4n^2}$ intégrable

$\forall n$, $\frac{(-1)^n(1+x^2)}{1+(nx)^2} \xrightarrow[x\infty]{} \frac{(-1)^n}{n^2}$, on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ CV

Par TDL : $\Gamma(x)\,(1+x^2) \longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Finalement : $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \underbrace{\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - 1\right)}_{=a}$

(C) f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

En $\underline{+\infty}$ $\sim \frac{a}{x^2}$ intégrable

En $\underline{0}$ $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable en 0 donc f intégrable en 0

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+(nx)^2} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(nx)^2}$$

Justifions l'inversion

$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$ DV $\not\subset$ TITAT SUIQ

On revient aux sommes partielles

Mq $\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k^2x^2} - \int \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+(kx)^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

On pose $R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+(kx)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+(kx)^2}$

$R_n \xrightarrow{\text{CVS}} 0$ par CSA

$\|R_n\| \leq \frac{1}{1+(n+1)^2x^2}$ (CSA)

$\leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

le TCD s'applique

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_n = 0 \iff \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+(kx)^2} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+(kx)^2}$

$$\int_0^{+\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k \, dx}{1+(kx)^2} \qquad \begin{aligned} u &= kx \\ du &= k\,dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}}_{\pi/2}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi}{2k} = \frac{-\ln 2}{2}\,\pi$$