Ex 10224 Nicolas

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ Calculer $\boxed{I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}}$

a) $$\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{\frac{2ik}{n}}}$$

donc $$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}}_{\text{Série de Riemann}} = \frac{z^{n-1}}{z^n - 1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^{1} \frac{dt}{z - e^{2i\pi t}} = \boxed{\frac{1}{2\pi} I}$$

• Cas 1 $|z| < 1$

Alors $\frac{z^{n-1}}{z^n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc $\boxed{I = 0}$

• Cas 2 : $|z| > 1$

$$\frac{z^{n-1}}{z^n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{z}$$

donc $\frac{1}{2\pi} I = \frac{1}{z}$ donc $\boxed{I = \frac{2\pi}{z}}$

b) Cas 1 $|z| < 1$

On se ramène à une somme géométrique.

$$\frac{1}{z - e^{it}} = \frac{e^{-it}}{ze^{-it} - 1} = -\frac{e^{-it}}{1 - ze^{-it}} = -e^{-it} \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i(n+1)t} z^n$$

• Posons $f_n(t) = e^{-i(n+1)t} z^n$ $C^0$

$\sup_{[0,2\pi]} |f_n| = |z|^n$ et $|z| < 1$ donc $\sum f_n$ CVN sur $[0, 2\pi]$

Par TITATSUS on a : $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z^n e^{-i(n+1)t} dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} z^n e^{-i(n+1)t} dt = 0$ donc $\boxed{I = 0}$

• Cas 2 : $|y|>1$

On a : $\dfrac{1}{y-e^{it}} = \dfrac{1}{y} \times \dfrac{1}{1-\frac{e^{it}}{y}} = \dfrac{1}{y} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{y^n} e^{int}$

• $f_n(t) = \dfrac{1}{y^n} e^{int}$ $C^0$

• $|f_n(t)| = \dfrac{1}{|y|^n}$ et $\sum \dfrac{1}{|y|^n}$ CV car $(|y|>1)$

donc $\sum f_n$ CVN sur $[0,2\pi]$.

Par TTTATSUS,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{y^n} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{y} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^n} \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} e^{int} dt}}_{=0}$$

$$\boxed{I = \frac{2\pi}{y}}$$

Ex 996 Diaz

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$$

f est paire

a) $0 \leq \left| \dfrac{\sin^2(nx)}{n^2} \right| \leq \underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{\text{rg série CV}}$ $\forall x$

Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. par TC $\Sigma$ ECVN.

b) $\forall x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(nx)}{n^2 x}$

Soit $g : \begin{array}{l} ]0,\frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t} \end{array}$ $\in \mathcal{C}^\infty(\underbrace{]0,\tfrac{\pi}{2}[}_{=I}, \mathbb{R})$

$\forall t \in I$, $g'(t) = \dfrac{\sin^2(t) - \sin^2(t)}{t^2}$

On peut minorer : $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$ $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ par concavité

Donc $\sin^2(nx) \geq \left(\frac{2}{\pi} nx\right)^2$ $\forall (nx) \leq \frac{\pi}{2}$ ie $n \leq \frac{\pi}{2x}$