$\boxed{1004}$ (Arthur)

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt}_{a_n}$$

$0 \leq \cos(t) \leq 1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$

$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow (a_n) \searrow$.

$f_n(t) = \cos^n(t)$ CM sur $[0, \pi/2]$

$$\xrightarrow{CVS} \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \\ 1 & \text{si } t = \pi/2 \end{cases}$$

$|f_n(t)| \leq 1$, intégrable sur $[0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{\pi/2} 0 = 0.$$

donc la série CV par CSSA.

Si on peut inverser $\int \Sigma$, alors $A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt$

$u = \tan(t/2)$

$dt = \frac{2du}{1+u^2}$

$$A = \int_0^1 \frac{2\,du}{1+u^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$= \int_0^1 du = 1$$

Mq on peut inverser $\int \Sigma$.

Revenons aux sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\,dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \sum_0^n (-\cos t)^k$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\cos t} - \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1}(t)\,dt}{1+\cos t} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos t} + (-1)^n \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1}(t)\,dt}{1+\cos t}} \xrightarrow[n \to \infty]{?} 0$$

CamScanner로 스캔하기

TCD : $\cdot \dfrac{\cos^{n+1}(t)}{1+\cos t} \longrightarrow 0 \quad t \in]0 ; \pi/2]$

en 0 : $1/2$.

$$\left| \frac{\cos^{n+1}(t)}{1+\cos t} \right| \leq 1$$ intégrable sur $[0 ; \pi/2]$

d'où le résultat

CamScanner로 스캔하기