$e^{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc on regarde $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$

$$F(x) = \int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

- $\frac{e^{-u}}{u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}$ et $\int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ DV (car $\frac{e^{-u}}{u} \sim \frac{1}{u}$)

donc $\int_x^{1} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{0}{\sim} \int_x^{1} \frac{1}{u}\,du$

$$\underset{0}{\sim} -\ln x$$

donc $F(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$

enfin $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)}$

3) On reprend $f'(x) = \int_0^{x} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$ (TDSAPGVL)

IPP :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$$

$$= -\left(\left[-\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{x+t}\,dt \right)$$

Les limites sont bien définies

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

d'où $\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x} + f(x)}$

Ex 997 Diane

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(nx)}$$

a) Domaine de définition

en $x=0$ $\frac{1}{ch^2(nx)} = 1$ donc f n'est pas définie en 0

en $x \neq 0$ $\frac{1}{ch^2(nx)} \begin{cases} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4}{e^{nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4}{e^{nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$

b) $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{ch^2(nx)} \xrightarrow[N\infty]{CVS} f(x)$

Mq $\sum_{n=0}^{N} \frac{-2n\,sh(nx)}{ch^3(nx)} \xrightarrow[N\infty]{CVU}$

$\forall x \neq 0$ $\left|\frac{2n\,sh(nx)}{ch^3(nx)}\right| \leq \left|\frac{2n\,th(nx)}{ch^2(nx)}\right|$

$\Vert$

$|U_n(x)| \leq \frac{2n}{ch^2(nx)}$

$\leq \frac{8n}{e^{2nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d'où par VL :

PFLI $\mathbb{R}_+^*$, Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$:

$0 \leq |U_n(x)| \leq \frac{8n}{e^{2na}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

$t \mapsto \frac{1}{ch^2(tx)}$ décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{x}\int_{nx}^{(n+1)x} \frac{dt}{ch^2(t)} \leq \frac{1}{ch^2(nx)} \leq \frac{1}{x}\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{dt}{ch^2(t)}$

$1 + \underbrace{\frac{1}{x}\int_{x}^{+\infty} \frac{dt}{ch^2(t)}}_{CV \text{ en } 0} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^2(t)}$

en 0 $\downarrow$ $+\infty$

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty}$

En $+\infty$ $1 \leq f(x) \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{ch^2(t)}}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0}$

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1}$