• Cas 2 : $|y|>1$

On a : $\dfrac{1}{y-e^{it}} = \dfrac{1}{y} \times \dfrac{1}{1-\frac{e^{it}}{y}} = \dfrac{1}{y} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{y^n} e^{int}$

• $f_n(t) = \dfrac{1}{y^n} e^{int}$ C^0

• $|f_n(t)| = \dfrac{1}{|y|^n}$ et $\sum \dfrac{1}{|y|^n}$ CV car $(|y|>1)$

donc $\sum f_n$ CVN sur $[0,2\pi]$.

Par TTTATSUS,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{y^n} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{y} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^n} \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} e^{int} dt}}_{=0}$$

$$\boxed{I = \frac{2\pi}{y}}$$

Ex 996 Diaz

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$$

f est paire

a) $0 \leq \left| \dfrac{\sin^2(nx)}{n^2} \right| \leq \underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{\text{rg série CV}}$ $\forall x$

Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. par TC Σ ECVN.

b) $\forall x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(nx)}{n^2 x}$

Soit $g : \begin{array}{l}]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t} \end{array}$ $\in \mathcal{C}^\infty(\underbrace{]0,\tfrac{\pi}{2}[}_{=I}, \mathbb{R})$

$\forall t \in I$, $g'(t) = \dfrac{\sin^2(t) - \sin^2(t)}{t^2}$

On peut minorer : $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$ $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ par concavité

Donc $\sin^2(nx) \geq \left(\frac{2}{\pi} nx\right)^2$ $\forall (nx) \leq \frac{\pi}{2}$ ie $n \leq \frac{\pi}{2x}$

Donc $f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor} + \sum_{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor + 1}^{+\infty} \geq \underbrace{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor} \frac{4}{\pi^2} \frac{\cancel{x^2} x^2}{\cancel{x^2}}}_{= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\pi}{2x} \rfloor} \frac{4}{\pi^2} x^2}$

$$f(x) \geq \left\lfloor \frac{\pi}{2x} \right\rfloor \frac{4x^2}{\pi^2}$$

Donc $\forall x > 0$, $\frac{f(x)}{x} \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{\pi}{2x} \right\rfloor}_{\underset{x \to 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}} \frac{4x}{\pi^2}$

$\frac{f(x)}{x} \geq g(x)$ avec $g(x) \sim \frac{2}{\pi}$

$\Longrightarrow \cancel{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0}$

$\Longrightarrow f$ non dérivable en 0 car $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ paire} \\ f \text{ dérivable} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f'(0) = 0}$

<u>Ex 973</u> Luca

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt$

a) <u>Déf</u> $u = t^n$, $du = n t^{n-1} dt = n u^{\frac{n-1}{n}} dt$

C^1 bijection

Alors $a_n = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{n} f(u) u^{\frac{n}{n-1}} du$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} \leq e^{n \frac{1}{n}} \leq e$

On a donc $\left[1, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \subset [1, e]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in [1, e]$

$|a_n| \leq \frac{1}{n} \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \underbrace{|f(u)|}_{\leq \|f\|_\infty^{[1,e]}} \underbrace{u^{\frac{n}{n-1}}}_{\leq e^{\frac{n}{n-1}}} dt \leq \frac{1}{n} (e-1) e^{\frac{n}{n-1}} \|f\|_\infty^{[1,e]} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

<u>Équivalent</u> en $n \to +\infty$