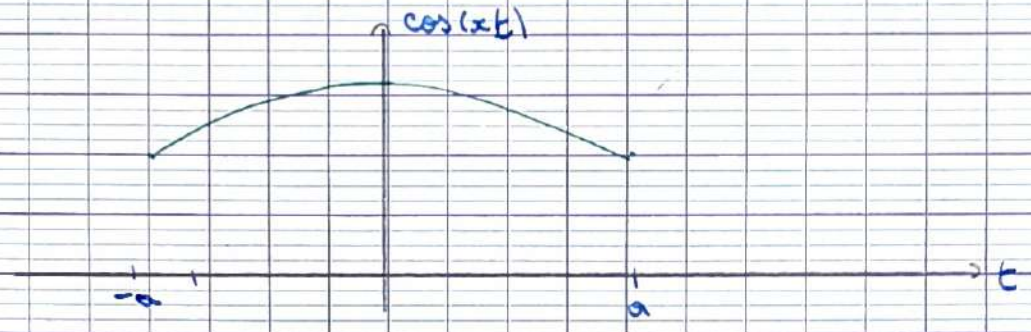
On a par (*) :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) e^{-ixt} dt = 0$

Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) \cos(tx) dt = 0$,

$\forall p \in \mathbb{N}$, $|x| > b$



cf la fin de la correction p 5 - 6

Ex 955 : Noam

$$F : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x \cos t}}_{f(x,t)} dt$$

Cas 1 : $a \in [-1, 1]$ tq $F(a)$ est bien définie

$\rightsquigarrow$ $a \geq 0$:

$f(a, t)$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc continue en a.

$\rightsquigarrow$ si $a \in]-1, 0[$:

Alors $1 + a \cos t > 0$

Donc $t \longmapsto \frac{1}{1 + a \cos t}$ continue donc F est définie

$\rightsquigarrow$ si $a = -1$:

$1 - \cos t = 2 \sin^2(\frac{t}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$

Or $\frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable en 0

tq $a \in]-1, 1]$ $\Rightarrow$ F def tq $\cos x \in]-1, 1]$

tq $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\pi$

Soit $x \in [0, \pi[$, on a :

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos t \cos x} \, dt$$

Avec $u = \tan \frac{t}{2}$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos x \, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}} \, \frac{2 \, du}{u^2 + 1}$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1 + \cos x (u^2 - 1)} \, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x + u^2 (1 + \cos x)} \, du$$

$$= \frac{1}{1 - \cos x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \, u \right)^2} \, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}}{1 + (\alpha(x) \times u)^2} \, du \qquad \alpha(x)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \left[\operatorname{Arctan}(\alpha(x) u) \right]_0^1$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sin x} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \right)}$$

<u>Ex 1152 :</u> Antérieure

$q \in]-1, 1[$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \; f(x) = (1 - qx) f(qx) \quad (*) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

<u>Analyse :</u> Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$ et $f(0) = 0$

On suppose que f est DSE, on note R le RCV et :

$\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$