

Exercice 949 David

Soit $(P_n)_n \in \mathcal{C}([0,1])^{\mathbb{N}}$

$$\text{tq } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1,1]} |P_n(x) - e^x| = 0$$

$$\text{i.e. } \|P_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{avec } f: x \mapsto e^x$$

$$\text{Mq } \deg(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Supposons par l'absurde que $\deg(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

On dispose de $\begin{cases} A \in \mathbb{N} \\ p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \end{cases} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_{p(n)}) \leq A$

Soit $r = \max \{ \deg(P_{p(n)}) : n \in \mathbb{N} \}$

Soit $(x_0, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ avec $\forall i, x_i \in [-1,1]$

et $\forall i, j \text{ tq } i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

on a $\exists! Q \in \mathbb{R}_r[X] \text{ tq } \forall i, Q(x_i) = e^{x_i}$

$$\text{Donc } (P_{p(n)}(x_0), \dots, P_{p(n)}(x_r)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e^{x_0}, \dots, e^{x_r}) = (Q(x_0), \dots, Q(x_r))$$

$$L_n = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^r \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

$$\text{On dit que } (P_{p(n)} - Q)(x) = \sum_{i=1}^r (P_{p(n)}(x_i) - Q(x_i)) L_i$$

$$|P_{p(n)}(x) - Q(x)| \leq \sum_{i=1}^r |P_{p(n)}(x_i) - Q(x_i)| \|L_i\|_{\infty}^{[-1,1]}$$

somme finie

$$\text{Donc } \|P_{p(n)} - Q\|_{\infty}^{[-1,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$P_{p(n)} \xrightarrow{quv} Q$$

$$p_n \xrightarrow{\text{unif}} f$$

Donc $f = Q$: absurde car f n'est pas polynomiale
 en $[-1, 1]$.

Donc $\deg(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$