

946

(william)

Soit $f \in E$. On note $\tau_a: f \in E \mapsto (t \mapsto f(t+a))$

Soit $h > 0$. On a $\frac{\tau_h(f) - f}{h} \in E$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\tau_{1/n}(f) - f}{1/n} \in E$. et $\frac{\tau_{1/n}(f) - f}{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f'$

On note $h_p = \frac{\tau_{1/p}(f) - f}{1/p}$.

lemme: $(f_1, \dots, f_n)$ liée $\Leftrightarrow \det(f_i(x_j)) \neq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $(g_1, \dots, g_n)$ base de E . Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$(g_1, \dots, g_n)$ est liée $\Leftrightarrow \det(g_i(x_j)) \neq 0$.

$(g_1, \dots, g_n, h_p)$ liée donc en particulier,

avec la famille $(x_1, \dots, x_n, x)$,
 x_{n+1}

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_1(x_n) & g_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) & g_n(x) \\ h_p(x_1) & \dots & h_p(x_n) & h_p(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} A \neq 0 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 0$$

E est un ev de dim finie et $E \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• En développant % dernière ligne :

$$A h_p(x) + \underbrace{h_p(x_1)}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f'(x)} \underbrace{1_1(x)}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f'(x_1)} + \dots + \underbrace{h_p(x_n)}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f'(x_n)} \underbrace{1_n(x)}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f'(x_n)} = 0$$

$$\Rightarrow A f'(x) + f'(x_1) 1_1(x) + \dots + f'(x_n) 1_n(x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f' \in \text{Vect}(1_1, \dots, 1_n)$. Or $1_i \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_n)$

$A \neq 0$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow f' \in E$$