

Exercice 937 (Antoine. L)

$$f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$$

Par $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : x \mapsto x^n f(x)$

• $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ f(1) & x = 1 \end{cases} \in \mathcal{C}_0([0,1], \mathbb{R})$

• $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0,1]$ $|f_n(x)| = |x|^n |f(x)|$

$$\leq 1 \times \|f\|_\infty = \varphi(x)$$

intégrable sur $[0,1]$.

Par TCD $I_n \rightarrow 0$

b) $x = 1 - \frac{u}{n}$ $I_n = \frac{1}{n} \int_0^{n \wedge 1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right) du$

$$dx = -\frac{du}{n}$$

$$n I_n = \int_0^n \underbrace{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right)}_{g_n(u)} du$$

Si $u \geq n$ $g_n(u) = 0$

$$n I_n = \int_0^{n \wedge 1} g_n(u) du$$

• $g_n(u) \xrightarrow{\text{cvs}} \underbrace{e^{-u} f(1)}_{\varphi(u)}$ par c.v. de f
 $\varphi(u), \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$|g_n(u)| \leq \left|f\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right| e^{-u}$$

$$\leq \|f\|_\infty e^{-u} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

Donc par TCO : $n I_n \rightarrow \int_0^1 e^{-u} f(1) du$ $f(1) \neq 0$

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$$

3) hyp $f(1) = 0$, $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

• 1^{er} cas $f'(1) \neq 0$

$$I_n = \int_0^1 x^n \underbrace{f(x)}_{f(1)=0} dx = \frac{1}{n+1} [x^{n+1} f(x)]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$\leq \|f'\|_{\infty}$$

$$(f(1)=0) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

Par hyp $f' \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $f'(1) \neq 0$

donc on peut appliquer b à f'

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{f'(1)}{n} \sim \frac{f'(1)}{n^2}$$

$$|I_n| \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} dx = \|f'\|_{\infty}$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \|f'\|_{\infty} \quad \text{TGSCV}$$

Suite:

$$I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \underbrace{\frac{x^{n+1} f'(x)}{n+1}}_{u_n(x)} dx$$

$$\text{Mq } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ CVS}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -f'(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -f'(x) \ln(1-x)$$

justification: Dev en serie entiere

ω TITAT

TITAT JUIR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |u_n(x)| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left| \frac{f'(x) x^{n+1}}{n+1} \right| dx$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |u_n(x)| dx}_{CV} \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|f'\|_{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1)}}_{CSC}$$

$$\boxed{\sum I_n} = \int_0^1 f'(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 f'(x) \ln(1-x) dx$$

↑
thm intervention
dérivée / f

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x} dx$$

Intervention du prof

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n f'(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n f'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f'(x)}{1-x} dx$$

fa p's de convergence: $\frac{f(x) - f(0)}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$

$$\sum_{k=0}^n I_k = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^n x^n \right) f'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} f'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f'(x)}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} f'(x)}{1-x} dx$$

$g(x)$ prolongée par cont sur $[0,1]$.

$$|x^{n+1} g(x)| \leq \|g\|_{\infty}$$

intégrable

sur $[0,1]$

→

$$x^{n+1} g(x) \xrightarrow{CV} 0$$

sur $[0,1]$

$$\int_0^1 x^{n+1} g(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$