

exercice 916 (Nicolas Herb)

$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, u et u' de carré intégrable.

a) Hq $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a $u(x)^2 - u(0)^2 = \int_0^x (u^2(t))' dt = \int_0^x 2u'(t)u(t) dt$

Or $2u' \times u$ intégrable

$$|2u'u| \leq u'^2 + u^2$$

donc $\exists (l_+, l_-) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$u(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} l_{\pm}$$

donc $l_+ = l_- = 0$

donc $u^2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

donc $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

b) Hq $u(x)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2 \right)^{1/2}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $u^2(x) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} 2u'(t)u(t) dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2u'(t)u(t) dt \leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2} \leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2}$$

Par ailleurs, $u(x)^2 = \int_{+\infty}^x 2u'u \leq 2 \sqrt{\int_{+\infty}^x u'^2} \sqrt{\int_{+\infty}^x u^2} = 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2}$

$$\leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2}$$

facteur 2 en trop

1

$$\alpha = u^2(1) \leq 2 \sqrt{\int_{-1}^1 u^2} \sqrt{\int_{-1}^1 u'^2}$$

$$u^2(b) \leq 2 \sqrt{\int_{-a}^a u^2} \sqrt{\int_{-a}^a u'^2}$$

$$\alpha \leq 2\sqrt{ab}$$

$$\alpha \leq 2\sqrt{cd}$$

$$\alpha \leq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{(a+c)(b+d)}$$

$$\Rightarrow ab + cd + 2\sqrt{abcd} \leq (a+c)(b+d)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{abcd} \leq ad + bc \quad \underline{OK}$$