

Exercice 871

(Augustin)

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$, décroissante et intégrable

a. Mq que $x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Pour $x \geq 0$,

$$\int_x^{2x} f(t) dt \geq \int_{2x}^{4x} f(t) dt = f(2x)(2x - x) = x f(2x)$$

$$\int_x^{2x} f(t) dt = \underbrace{\int_0^{2x} f(t) dt}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

d'où,

$$\frac{2 f(2x) x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad f(2x) 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

b. Mq $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour $y \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^y x(f(x) - f(x+1)) dx &= \int_1^y x f(x) dx - \underbrace{\int_1^y x f(x+1) dx}_{\text{chgt. aff. } u=x+1, du=dx} \\ &= \int_1^y x f(x) dx - \int_2^{y+1} (u-1) f(u) du \\ &= \int_1^y x f(x) dx - \int_2^{y+1} u f(u) du + \int_2^{y+1} f(u) du \\ &= \int_1^2 x f(x) dx - \int_y^{y+1} x f(x) dx + \int_2^y f(u) du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^{y+1} x f(x) dx \leq \int_0^{y+1} x f(y) dy \\
 &= f(y) \left(\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \\
 &= f(y) (y+1)
 \end{aligned}$$

Donc pour $y \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} f(y)y \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \\ f(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

$$\underline{\int_1^{+\infty} x (f(x) - f(x+1)) dx \quad \text{cvg}}$$