

Exercice 870

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante et bornée. f'' bornée

Par le TLM : f est majorée + continue $\Rightarrow \lim_{+\infty} f$ existe

On note $l = \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}$

Si jamais $f' \xrightarrow{+\infty} L \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par le TAF, $\exists c_x \in]x, x+1[$, $f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1}$

Donc $f'(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = L$ (car $c_x \sim x$)

$\xrightarrow{+\infty} l \quad \xrightarrow{+\infty} l$

Existence

f'' bornée donc $\exists m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f''(x)| \leq m$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme f croissante, $f' > 0$

$\|f''\|_\infty$ existe et f' est $\|f''\|_\infty$ lipschitzienne

Donc par le 868, f' est uniformément continue + intégrable

Car f' positive et $\int_0^x f' = f(x) - f(0) \rightarrow L - f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} f' = 0$$