

Exercice 738

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

$$f : t \longrightarrow (g(t), h(t))$$

g et h sont $\mathcal{C}^1$ donc g' et h' continues sur $[0, 1]$ donc bornées sur $[0, 1]$

$$\exists M_g \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], |g'(t)| \leq M_g$$

$$\exists M_h \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], |h'(t)| \leq M_h$$

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |g(x) - g(y)| \leq M_g |x - y|$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], |g(x) - g(y)| \leq M_g \frac{1}{n}$$

$$\text{De même, } \forall (x, y) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], |h(x) - h(y)| \leq M_h \frac{1}{n}$$

On pose $C = M_g \cdot M_h$, $a = \min_{x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} (g(x))$ et $b = \min_{x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} (h(x))$

On prend les points :

$$A(a, b) \quad B\left(a + \frac{M_g}{n}, b\right)$$

$$D\left(a, b + \frac{M_h}{n}\right) \quad D\left(a + \frac{M_g}{n}, b + \frac{M_h}{n}\right)$$

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{M_g}{n} \cdot \frac{M_h}{n} = \frac{C}{n^2}$$

$$\text{Pour } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad \begin{cases} a \leq g(x) \leq a + \frac{M_g}{n} \\ b \leq h(x) \leq b + \frac{M_h}{n} \end{cases}$$

Donc $f(x) \in ABCD$