

Exe 733:

1) Posons, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) + f'(x)$. $g(x) \xrightarrow{+\infty} l$

On peut poser $g(x) = l + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{+\infty} 0$ et ε continue

Variation de la constante: (*)

$$f(x) = \lambda(x) e^{-x}$$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda'(x) e^{-x} = g(x) = l + \varepsilon(x)$$

$$\rightarrow \lambda'(x) = l e^x + \varepsilon(x) e^x$$

$$\rightarrow \lambda(x) = l e^x + \int_0^x \varepsilon(t) e^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = l + \left[\int_0^x \varepsilon(t) e^t dt \right] e^{-x}}$$

Soit $M > 0$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \forall x \gg \alpha, |\varepsilon(x)| \leq M$

$$\text{Or, } |f(x) - l| \leq \left[\int_0^x |\varepsilon(t)| e^t dt \right] e^{-x} \leq \underbrace{\left[\int_0^\alpha |\varepsilon(t)| e^t dt \right] e^{-x}}_{= K \text{ cste}} + M \left[\int_\alpha^x e^t dt \right] e^{-x}$$

$$= K e^{-x} + M (e^x - e^\alpha) e^{-x}$$

$$= \underbrace{K e^{-x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + M \underbrace{(1 - e^\alpha e^{-x})}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \leq 2M \text{ pour } x \text{ assez grand}$$

$$\text{donc } \boxed{|f(x) - l| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

2) Posons $g(x) = f'(x) + f(x)$. $f \in \mathcal{E}^2$ donc $g \in \mathcal{E}^1$, et $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \xrightarrow{+\infty} l$
 $= g(x) + g'(x)$

Donc par le 1), $g(x) \xrightarrow{+\infty} l$. Donc $f'(x) + f(x) \xrightarrow{+\infty} l$ i.e., par 1), $\boxed{f(x) \xrightarrow{+\infty} l}$