

Arthur

[ex. 732]

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$$

par le 737.

$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ alors

$$\frac{1}{x} \int_0^x f'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

$$\frac{1}{x} (f(x) - f(0)) \rightarrow l$$

$$\frac{f(x)}{x} - \underbrace{\frac{f(0)}{x}}_{\rightarrow 0} \rightarrow l$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \rightarrow l$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

Soit $M > 0$, $\exists x_0 > 0$ tel que $x \geq x_0 \Rightarrow f'(x) \geq M$

Soit $x \geq x_0$.

Th. des accroissements finis entre x_0 et x

$$\Rightarrow \exists c \in]x_0, x[\text{ tq } f(c) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq M$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq M \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq M + \frac{f(x_0) - Mx_0}{x}$$

Donc APCR x_0

$$\left| \frac{f(x)}{x} - M \right| \leq \frac{M}{x}$$

Pour $x \geq \max(x_0, \frac{M}{\epsilon})$

$$\frac{f(x)}{x} \geq M - \epsilon$$

$$\text{Donc } \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$