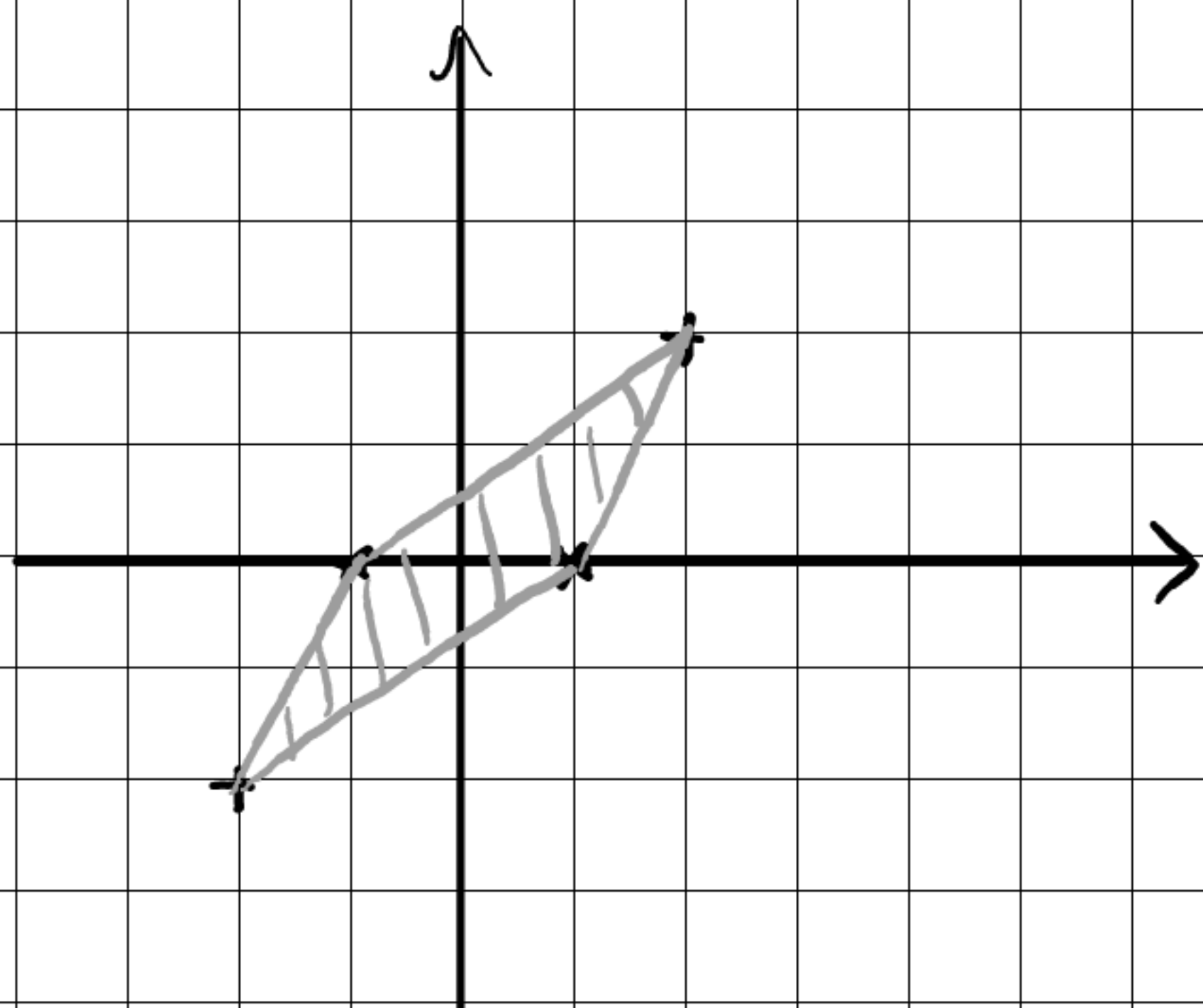


Ex 686 - Nathanael



a) On cherche

$$(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

t_q

$$\begin{cases} e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 - e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^2$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$N(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

$$\text{Si } N(y) \leq 1, \quad \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

et donc y dans le parallélogramme.

b) $N(v) = \inf(t > 0, \frac{v}{t} \in \mathcal{C})$

• Léparation Soit $v \notin t_q$ $N(v) = 0$

On a $v(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}} \quad t_q \quad \begin{cases} t_n \rightarrow 0 \\ \frac{v}{t_n} \in \mathcal{C} \end{cases}$

Si $v \neq 0$, $\left| \frac{v}{t_n} \right| \xrightarrow{+\infty} +\infty$ Pas possible
car $\mathcal{C}$ borné. Donc $v = 0$

• Homogénéité Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$\exists (t_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, $t_n \rightarrow N(\lambda v)$, $\frac{t_n}{v} \in \mathcal{C}$

On mg $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$

$\frac{v}{t_n/\lambda} \in \mathcal{C}$ donc $\left| \frac{t_n}{\lambda} \right| \rightarrow N(v)$

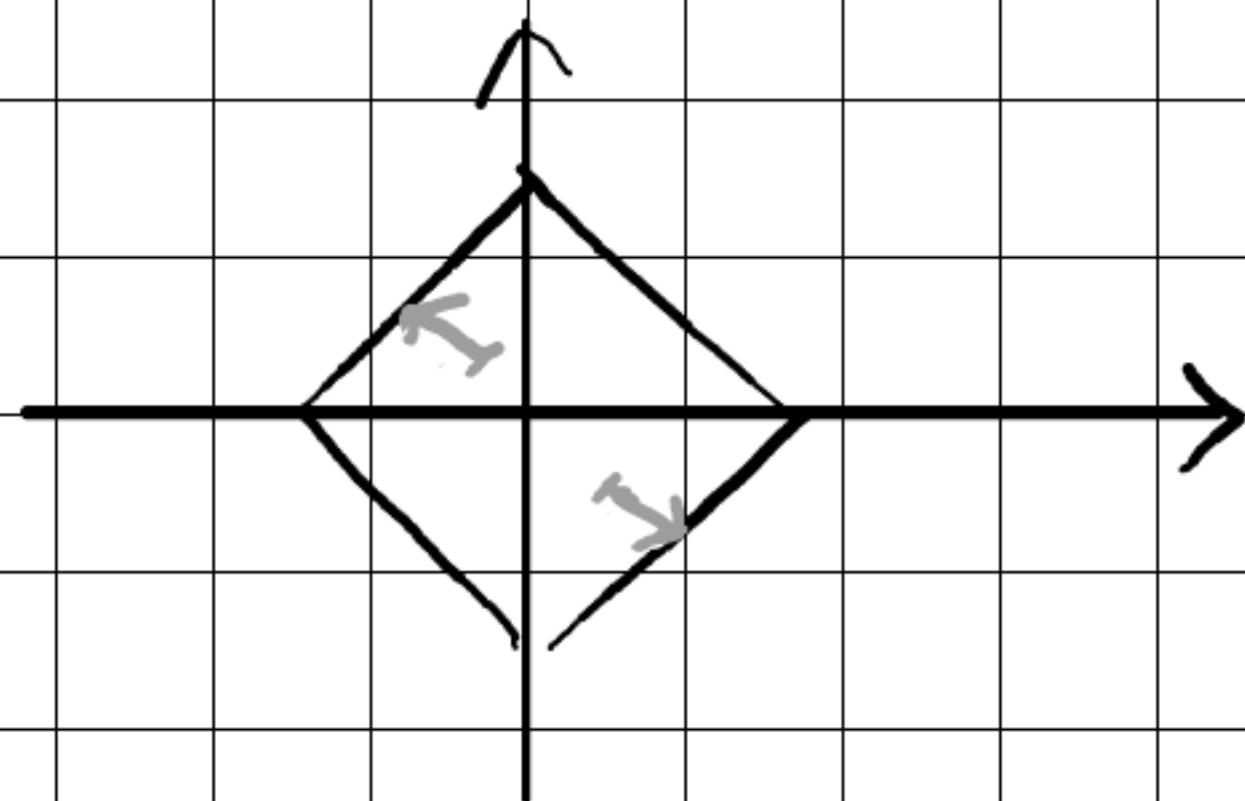
$t_n \rightarrow \lambda N(v) = N(\lambda v)$

Si $\lambda \in \mathbb{R}^-$

On a que $\mathcal{C}$ est symétrique donc $-\lambda \in \mathbb{R}^+$

et $\frac{t_n}{-\lambda} \rightarrow N(v)$

et $\left| \frac{t_n}{\lambda} \right| \rightarrow N(v)$



• I.T Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} a_n \rightarrow N(u) \\ b_n \rightarrow N(v) \end{cases}$

$\frac{u}{a_n}, \frac{v}{b_n} \in \mathcal{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Convexité de $\mathcal{C}$: $\forall t \in [0, 1]$,

$t \frac{u}{a_n} + (1-t) \frac{v}{b_n} \in \mathcal{C}$

On pose $t_n = \frac{a_n}{a_n + b_n} \Rightarrow \frac{u}{a_n + b_n} + \frac{v}{a_n + b_n} \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \frac{u+v}{a_n + b_n} \in \mathcal{C} \quad \forall n$

$$a_n + b_n \rightarrow N(u) + N(v) \geq N(u+v)$$

$$\text{Si } a_n + b_n \rightarrow l < N(u+v)$$

Par def. de $N(u+v)$, $\frac{u+v}{a_n+b_n} \notin \mathcal{C}$ APCR

$$\text{Si } N(v) < 1, \exists t \leq 1 \text{ tq } \frac{v}{t} \in \mathcal{C}$$

Par convexité de $\mathcal{C}$, $v \in \mathcal{C}$

$$\text{Si } N(v) = 1, \exists (t_n) \in [1, +\infty[^\mathbb{N},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{t_n} \in \mathcal{C} \text{ comme } \mathcal{C} \text{ fermé, } \frac{v}{N(v)} = v \in \mathcal{C} \\ t_n \rightarrow N(v) \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \mathcal{B}_0(0_E, 1) \subset \mathcal{C}$$

$$\text{Si } v \in \mathcal{C}, \frac{v}{1} \in \mathcal{C}, \text{ donc } N(v) \leq 1$$

$$\text{Donc } \mathcal{C} = \mathcal{B}_0(0_E, 1)$$

$$0_E \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}, \text{ donc } \exists \mathcal{B}_0(0_E, r) \subset \mathcal{C} \text{ et donc}$$

$$\forall v \exists t \text{ assez grand tq } \frac{v}{t} \in \mathcal{B}_0(0_E, r)$$

$$\text{et } \{t > 0 / \frac{v}{t} \in \mathcal{C}\} \text{ non vide} \in \mathcal{C}$$

d'où l'inf.