

Suiv. ex 687

c) F fermé $\rightarrow$ à méditer.

ccl : $F \subset \bar{F}$ or $F \subset F \Rightarrow \bar{F} \subset F$

Or F fermé donc $\bar{F} = F$

d'où $\begin{cases} F \subset \bar{F} \\ \bar{F} \subset F \end{cases}$ de par double inclusion:
 $\boxed{\bar{F} = F = F}$

ex 679: (Mattea)

$p, q \in \mathcal{L}(E)$ $p^2 = p$ et $q^2 = q$ E un r.v.m

on suppose que $\forall x \neq 0, \|(p-q)(x)\| < \|x\|$

a) $\dim \operatorname{Im} p = \dim \operatorname{Im} q$

Soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \ker q$: $\|(p-q)(x)\| = \|p(x)\| < \|x\|$

Or $x \in \operatorname{Im} p$ de $p(x) = x$ et on a $\|x\| < \|x\|$
 c'est absurde. De $x=0$ et $\operatorname{Im} p \cap \ker q = \{0\}$

Par un raisonnement analogue (p, q jouent des rôles symétriques) $\operatorname{Im} q \cap \ker p = \{0\}$.

On considère donc $p|_{\operatorname{Im} q}$

Comme $\ker p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$, $p|_{\operatorname{Im} q}$ est injective
 de $\dim \operatorname{Im} q \leq \dim \operatorname{Im} p$.

On considère $q|_{\operatorname{Im} p}$ injective aussi et $\dim \operatorname{Im} p \leq \dim \operatorname{Im} q$

d'où $\boxed{\dim \operatorname{Im} p = \dim \operatorname{Im} q}$

b) M_q $M = p q + (id - p)(id - q)$ est inversible

$$\begin{aligned} \cdot p \cdot M &= p^2 q + (p - p^2)(id - q) \\ &= p q + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot (id - p) \cdot M &= (p - p^2) q + (id - p)^2 \cdot (id - q) \\ &= 0 + (id - p)(id - q) \end{aligned}$$

M_q est injective:

Soit $x \in \ker M$, $Mx = 0$

$$\cdot \text{de } p \cdot Mx = 0 \Rightarrow p(qx) = 0$$

$$\text{de } qx \in \ker p \cap \text{Im } q$$

$$\text{de } qx = 0 \text{ cf. précédemment}$$

$$\cdot \text{de même } (id - p) \cdot Mx = 0$$

$$= (id - p)(id - q)x = 0$$

$$\text{de } (id - q)(x) \in \text{Im } p \cap \ker q = \{0\}$$

$$(\text{car } q \cdot (id - q)x = 0 \text{ et } (id - q)x = p(id - q)x)$$

$$\text{de } on a aussi (id - q)x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } x &= qx + x - qx \\ &= \underbrace{qx}_0 + \underbrace{(id - q)x}_0 = 0 \end{aligned}$$

et v injective de bijective car $v \in \text{GL}(E)$

$$\cdot M_q \quad p = M q M^{-1} \Rightarrow p v = v q$$

$\cdot$ on explique p à gauche de M d'un fait:

$$\begin{aligned} p \cdot M &= p^2 q + (p - p^2)(id - q) \\ &= p q \end{aligned}$$

$\cdot$ Puis q à droite de v :

$$\begin{aligned} v \cdot q &= p q^2 + (id - p)(q - q^2) \\ &= p q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } p v &= p q = M q \\ &\text{et } p = \underline{M q M^{-1}} \end{aligned}$$