

Exe 677:

$$N(x, y) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} \end{cases}$$

$$f : x \mapsto \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} \text{ est } \overset{\text{bien}}{\text{définie sur } \mathbb{R}}, \text{ continue, et } f(x) \xrightarrow{\pm \infty} 0$$

TBA: $f(\mathbb{R})$ est un intervalle et les bornes sont atteintes. D'où le sup.

$$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) \geq 0.$$

$$N(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |x+ty| = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

• Homogénéité évidente

• IT: Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{|(a+c) + t(b+d)|}{1+t+t^2} \underset{\text{IT}}{\leq} \frac{|a+tb|}{1+t+t^2} + \frac{|c+td|}{1+t+t^2}$$

Par passage au sup, on a bien $N((a, b) + (c, d)) \leq N(a, b) + N(c, d)$
Donc N est une norme.

$$(x, y) \in B_f(0, 1) \Leftrightarrow N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{|x'+ty'|}{1+t+t^2}, (x', y') \notin B_f(0, 1) \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |x+ty| \leq 1+t+t^2 \\ & \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}, (x, y) \in B_f(0, 1) \quad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x+ty \leq 1+t+t^2 \\ -(x+ty) \leq 1+t+t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t^2 + (1+y)t + 1+x \geq 0 \\ t^2 + (1-y)t + 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = (1+y)^2 - 4(1+x) \leq 0 \\ \Delta_2 = (1-y)^2 - 4(1-x) \leq 0 \end{cases}$$

