

Ex 666 - Nicolas

$$\Leftrightarrow M = \lambda I_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$E = \{\lambda I_n\} \quad \text{borné}$$

$\Rightarrow$ Par contrapositive: Supposons que M n'est pas une homothétie.

$\exists X \in \mathbb{C}^n, (X, \pi X)$ libre

$\rightarrow B = (X, \pi X, E_3, \dots, E_n)$ base de $\mathbb{C}^n$

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad M = P^{-1} \begin{pmatrix} \pi X & \pi X & \pi E_3 & \dots \\ 0 & \boxed{\text{libre}} & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} X \\ \pi X \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{matrix} P$$

Posons $Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \boxed{\text{libre}} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \neq 0$

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\text{libre}} \\ 1 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{donc } P \in \mathcal{O}_n$$

$$\Rightarrow Q_\alpha^{-1} PMP^{-1} Q_\alpha = Q_{\frac{1}{\alpha}} PMP^{-1} Q_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\text{libre}} \\ \alpha & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

donc E non borné