

$$M = PTP^{-1}$$

$$PQ(B_k)P^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

"

$$Q(PB_kP^{-1})$$

$$Q_m \text{ a } Q(B_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T$$

• Mg B m-st pas borné

$$A_k = kI_2$$

$$Q(A_k) = Q(k)I_2$$

$$\| \cdot \|_{\infty} \quad \|Q(A_k)\| = \|Q(k)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

de B m-st pas borné

• Mg B m-st pas forcément un borné :

$$\text{Si } B \text{ est fermé, } \bar{B} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \Rightarrow B = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$Q = x^2$$

$$\text{Si on prend } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on cherche } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tq } B = A^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a^2+bc = 0 & (1) \\ b(a+d) = 1 & (2) \\ c(a+d) = 0 & (3) \\ d^2+bc = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow (a+d) = 0 \quad \text{ou} \quad c = 0$$

↓

$$(2) : ab = 1$$

↓

$$(4) \Rightarrow d = 0$$

$$(1) \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \text{par (2)} \Rightarrow ab = 1$$

Ex 663 (Antkun)

a) cf complément de cours

$$b) \quad U_0 = I_m \quad U_{p+1} = \frac{1}{2} (U_p + A U_p^{-1})$$

Par récurrence, montrons que U_p et A commutent

$$U_p \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$$

$$A \in GL_m(\mathbb{R})$$

$$p=0 \Rightarrow \text{OK}$$

$$\text{HR: } H(p) \Rightarrow H(p+1)$$

$$\begin{aligned} U_{p+1} A &= \frac{1}{2} (U_p A + A U_p^{-1}) \quad \text{car } U_p A = A U_p \quad (\text{par } H(p)) \\ &= \frac{1}{2} (A U_p + A U_p^{-1}) \quad \Rightarrow A = U_p^{-1} A U_p \\ &= A U_{p+1} \quad \text{d'où } H(p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{p+1}^T &= \frac{1}{2} (U_p^T + (A U_p^{-1})^T) \\ &= \frac{1}{2} (U_p^T + U_p^{-T} A^T) \\ &= (U_p^{-1})^T A^T \\ &= (U_p^T)^{-1} A^T \\ &= A U_p^{-1} \quad \text{car } U_p^{-1} \text{ et } A \text{ commutent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_{p+1}^T = \frac{1}{2} (U_p + A U_p^{-1})$$

$$= U_{p+1} \quad \text{d'où } U_{p+1} \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$$

$$U_{p+1} = \frac{U_p}{2} (I_m + U_p^{-1} A U_p^{-1})$$

$$(*) \quad \det(U_{p+1}) = \underbrace{\det\left(\frac{U_p}{2}\right)}_{\neq 0} \underbrace{\det(I_m + U_p^{-1} A U_p^{-1})}_{\neq 0} = \frac{\det(U_p)}{2^m} \det(I_m + U_p^{-1} A U_p^{-1})$$

$$\forall A \in M_m(\mathbb{R}) \quad A A^T \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$$

$$x^T A A^T x = (A^T x)^T A^T x = \|A^T x\|^2 \geq 0$$

$$\text{On } U_p^{-1} A U_p^{-1} = U_p^{-1} \sqrt{A} \sqrt{A} U_p^{-1}$$

$$\text{et } (U_p^{-1} \sqrt{A})^T = \sqrt{A}^T (U_p^{-1})^T = \sqrt{A} U_p^{-1}$$

$$\text{donc } U_p^{-1} A U_p^{-1} = (U_p^{-1} \sqrt{A}) (U_p^{-1} \sqrt{A})^T$$

$$\text{donc } U_p^{-1} A U_p^{-1} \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(U_p^{-1} A U_p^{-1}) \neq 0$$

$$\text{d'où } \det(U_{p+1}) \neq 0 \quad \text{par } (*)$$

$$\text{et } U_{p+1} \in GL_m(\mathbb{R})$$

Suit 663

Suit TO 11/12 P.2

U_P et A commutent

$$\text{donc } U_P = P D_P P^T ; A = P D_A P^T$$

$$\begin{aligned} U_{P+1} &= \frac{1}{2} (P D_P P^T + P D_P^{-1} \underbrace{P^T P}_{I_n} D_A P^T) \\ &= P \left(\frac{1}{2} (D_P + D_P^{-1} D_A) \right) P^T \end{aligned}$$

$$U_{P+1} = P D_{P+1} P^T$$

$$\text{d'où } D_{P+1} = \text{diag}(u_{P+1,1}, \dots, u_{P+1,n})$$

$$D_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$u_{P+1,i} = \frac{1}{2} (u_{P,i} + \frac{\lambda_i}{u_{P,i}})$$

Hypothèse récurrence : $u_{P,i} > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

d'après ex 3 $\lambda_i > 0 \in [a, b]$, $x_{m+1} = \frac{1}{2} (x_m + f(x_m))$
avec f 1-lipschitzienne sur $[a, b]$
alors x_m converge vers un point fixe de f .

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{\lambda_i}{x} \quad |f_i(x) - f_i(y)| = \left| \frac{\lambda_i}{x} - \frac{\lambda_i}{y} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_i}{xy} \right| |x - y| \end{aligned}$$

$$\text{si } x \geq \sqrt{\lambda_i} \text{ et } y \geq \sqrt{\lambda_i} \text{ alors } \frac{\lambda_i}{xy} \leq 1$$

f_i 1-lip sur $[\sqrt{\lambda_i}, +\infty[$

$$u_{1,i} - \sqrt{\lambda_i} = \frac{1 + \lambda_i - 2\sqrt{\lambda_i}}{2} = \frac{(1 - \sqrt{\lambda_i})^2}{2} \geq 0$$

donc f k-lip sur $[\sqrt{\lambda_i}, u_{1,i}]$ et $u_{1,i} \in [\sqrt{\lambda_i}, u_{1,i}]$

donc $u_{P,i}$ converge vers un point fixe de f_i
car $f_i(x) = \frac{\lambda_i}{x} = x \iff x = \sqrt{\lambda_i}$

donc $v_{p,i} \rightarrow \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$D_P \rightarrow \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

$\varphi: A \rightarrow P A P^T$ linéaire en dim finie
de continue.

donc $v_p \rightarrow P \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_D P^T$

$$\text{on } (P D P^T)^2 = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T = A$$

donc $v_p \rightarrow \sqrt{A}$

$$\text{En } 628 = 685 \quad (\text{Théorème})$$

$$1: \quad B = B_1(a, n) ; B' = B_0(a, n)$$

Ma B, B' convexes ie $\forall x, y \in B, \forall t \in [0, 1],$
 $tx + (1-t)y \in B$

$$\text{Soient } (x, y) \in B^2, \begin{cases} \|x - a\| \leq n \\ \|y - a\| \leq n \end{cases}$$

Soit $t \in [0, 1],$

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - a\| &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &\leq t \|x-a\| + (1-t) \|y-a\| \\ &\leq t n + (1-t) n = n \end{aligned}$$

Par B' : le même raisonnement avec des inégalités strictes.

2): N : euclidienne $\forall u, v \in B, u \neq v, \exists u, v \in B'$

Par 1), $\exists u, v \in B$ ie $\forall t \in [0, 1],$

$$\|tu + (1-t)v\| \leq n$$