

Exercice 634 (suite)

$$D^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{bmatrix}$$

$$A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$$

Exercice 658 (William)

$$\text{Sur } \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\text{Mq Soient } (x, y) \in \mathbb{R}^n, \|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [1, n], x_k y_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| + \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| = 2 \sum_{k=1}^n |x_k| + |y_k|$$

$$\text{Or } \forall k \in [1, n], |x_k + y_k| + |x_k - y_k| \leq 2(|x_k| + |y_k|)$$

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{2(|x_k| + |y_k|) - |x_k + y_k| - |x_k - y_k|}_{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [1, n], 2(|x_k| + |y_k|) = |x_k + y_k| + |x_k - y_k|$$

$$\Rightarrow x_k, y_k, -y_k \text{ de même signe } \forall k \in [1, n].$$

$$\Rightarrow x_k y_k = 0 \forall k \in [1, n]$$

$\Leftarrow$

$$f \in GL_m(\mathbb{R})$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, $\|f(x)\|_1 = \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$

On note $(e_1, \dots, e_m)$ la Bc de $\mathbb{R}^m$

Soit $i, j \in [1, m]$, $\|e_i + e_j\|_1 + \|e_i - e_j\|_1 = 2 + 2 = 4 = 2 \times (\|e_i\|_1 + \|e_j\|_1)$

f préserve la norme $\Rightarrow f(e_i), f(e_j)$ vérifient (a)

$$A = \text{mat}_{Bc}(f)$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_m) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ \vdots \\ e_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

CORRECTION:

Si a_{ii} non nul, sur la ligne i on a que des zéro

Si a_{ji} non nul, idem

donc deux lignes liées donc $f \notin GL_m(K)$

CONTRADICTION

On note a_{ij} les coefs de A

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}| = 1 \quad \forall j \in [1, m]$$

et par (a), Soit $l \in [1, m]$ et $i \in [1, m]$ avec $i \neq l$

$$\forall k \in [1, m], a_{ki} a_{kl} = 0$$