

TD du 11/12/25

Exercice 638 (Antoine T.)

$N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie $\left\{ \begin{array}{l} \text{separation} \\ \text{homogénéité} \end{array} \right.$

$$B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$$

Ma N est une norme $\Leftrightarrow B$ est convexe.

$(\Rightarrow)$ hyp: N est une norme

$$x, y \in B, t \in [0, 1]$$

$$N(tx + (1-t)y) \leq \underbrace{tN(x)}_{\leq 1} + (1-t) \underbrace{N(y)}_{\leq 1} \leq 1$$

Donc $tx + (1-t)y \in B \Rightarrow B$ convexe

$(\Leftarrow)$ hyp: B convexe

$$x, y \in E \quad X := \frac{x}{N(x)} \quad \text{et} \quad Y := \frac{y}{N(y)}$$

$$N(X) = \frac{N(x)}{N(x)} = 1 \quad \text{et} \quad N(Y) = \frac{N(y)}{N(y)} = 1$$

$$\forall t \in [0, 1], N(tX + (1-t)Y) \leq 1$$

$$t = \frac{N(x)}{N(x) + N(y)} \quad \Rightarrow \quad 1-t = \frac{N(y)}{N(x) + N(y)}$$

$$\frac{N(x)x}{(N(x) + N(y))N(x)} + \frac{y}{N(y)} \cdot \frac{N(y)}{N(x) + N(y)} = \frac{x+y}{N(x) + N(y)}$$

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \text{IT} \Rightarrow \underline{N \text{ norme}}$$