

en 636 (Théodore)

a) $A \in M_2(\mathbb{C})$ $\overset{Mq}{c} = \{ Q(A) : Q \in \mathbb{C}[x] \}$ fermé
 $\left. \begin{array}{l} \cdot c \subset M_2(\mathbb{C}) \\ \cdot c \text{ stable par } CL \end{array} \right\} \Rightarrow c \text{ ser de } M_2(\mathbb{C})$
 $\Rightarrow c \text{ fermé}$

b) Soit $Q \in \mathbb{C}[x]$ non constant
 $B = P D P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $A = P D_1 P^{-1}$ où $D_1 = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$

$$Q(A) = P Q(D_1) P^{-1} \quad \hookrightarrow \text{diag}(Q(a_1), \dots, Q(a_n))$$

On cherche $\forall i \in \{1, n\}$, a_i tq $\underbrace{Q(a_i) - \lambda_i}_{\text{polynôme de degré } \geq 1} = 0$
 impossible par d'Alembert-Goursat
 Donc $A = P D_1 P^{-1}$ convient

c) $B = \{ Q(A) : A \in M_2(\mathbb{C}) \} \overset{Mq}{B} = M_2(\mathbb{C})$

Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$

cas 1 M diagonalisable $\rightarrow M = Q(A)$ cf b.

cas 2 M non diagonalisable: $M \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ trigonalisable

On dispose de $\{A_k\}_k \in \underbrace{\mathbb{F}^{n \times n}}_{\text{matrices diagonalisables}}$ tq $A_k = \frac{1}{k} J^T$

On a de plus, par b), $\forall k, \exists B_k, A_k = Q(B_k)$
 $Q(B_k) \rightarrow M$

$$M = PTP^{-1}$$

$$PQ(B_k)P^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

"

$$Q(PB_kP^{-1})$$

$$Q_m \text{ a } Q(B_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T$$

• Mg B m-st pas borné

$$A_k = kI_2$$

$$Q(A_k) = Q(k)I_2$$

$$\| \cdot \|_{\infty} \quad \|Q(A_k)\| = \|Q(k)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

de B m-st pas borné

• Mg B m-st pas forcément un borné :

$$\text{Si } B \text{ est fermé, } \bar{B} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \Rightarrow B = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$Q = x^2$$

$$\text{Si on prend } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on cherche } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tq } B = A^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a^2+bc = 0 & (1) \\ b(a+d) = 1 & (2) \\ c(a+d) = 0 & (3) \\ d^2+bc = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow (a+d) = 0 \quad \text{ou} \quad c = 0$$

↓

$$(2) : ab = 1$$

↓

$$(4) \Rightarrow d = 0$$

$$(1) \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \text{par (2)} \Rightarrow ab = 1$$

Ex 663 (Antkun)

a) cf complément de cours