

Exercice 630

(Martin)

E est un

$$u \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$$

$$\forall x \in F \quad |u(x)| \leq \|x\|$$

Soit $x, z \in F^2$, Soit $y \in F$

$$u(x) + u(z) = u(x+z) \leq |u(x+z)| \leq \|x-y+y+z\|$$

$$\stackrel{IT}{\leq} \|x-y\| + \|y+z\|$$

Exercice 635 (William.)

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (x, y) \text{ libre} \}$$

(a) Soit $(x_m, y_m) \in (\Omega^c)^{\mathbb{N}^2}$ tq

$$\begin{aligned} x_m &\longrightarrow x \in \mathbb{R}^3 \\ y_m &\longrightarrow y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Mq (x, y) liée ie $(x, y) \in \Omega^c$

$$\forall m \in \mathbb{N}, (x_m, y_m) \text{ est liée} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_m, \beta_m) \text{ tq } \alpha_m x_m + \beta_m y_m = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists m_1 \in \mathbb{N} : \forall m \geq m_1, \|x_m - x\| < \varepsilon$

$$\exists m_2 \in \mathbb{N} : \forall m \geq m_2, \|y_m - y\| < \varepsilon$$

Supposons que $\forall m \geq \max(m_1, m_2)$, $\alpha_m \neq 0$

$$\forall m \geq N, \begin{cases} \|y_m - y\| < \varepsilon \\ \left\| -\frac{\beta_m}{\alpha_m} y_m - y_m \right\| < \varepsilon \end{cases}$$

Soit $n \geq N$

$$\|y_n - y\| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\text{et } \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} + 1 \right| \|y_n\| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{donc } 0 < \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} + 1 \right| < \frac{\varepsilon}{\|y_n\|} \quad \forall n \geq N$$

$$\frac{\varepsilon}{\|y_n\|} \longrightarrow \frac{\varepsilon}{\|y\|} \Rightarrow \vartheta_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} + 1$$

$(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, d'après BW, $\exists \varphi$ extractrice de $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{tq } \vartheta_{\varphi(n)} \longrightarrow \gamma \in \left] 0, \frac{\varepsilon}{\|y\|} \right[$$

Donc $\left(\frac{\beta_{\varphi(n)}}{\alpha_{\varphi(n)}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie non nulle notée b

Par passage à la limite dans $(*)$, $x + by = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$(b) \quad \psi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto x \wedge y \end{cases}$$

bilinéaire en dimension finie
 $\Rightarrow$ continue.

$$\Omega = \underbrace{\psi^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0_E\})}_{\text{ouvert}}$$

$\Rightarrow \Omega$ ouvert.

