Ex 632 - Augustin

a) Soit $(A^k) \in O_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $A^k \longrightarrow M$

$(\ )^T$ est linéaire, donc continue

$(A^k)^T \longrightarrow M^T$

Le produit matriciel est continu

$\underbrace{A^k A^{T^k}} \longrightarrow MM^T$ $\Rightarrow$ $I_n \longrightarrow MM^T$ donc

$(AA^T)^k = I_n$ $MM^T = I_n$

$A^k = A^{k-1}A \longrightarrow M = MA$ Donc $\underline{A = I_n}$

b) Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$

$S_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A^i$

$\rightarrow$ $\underline{\text{Si } A \in SO(\mathbb{R})}$

$A = P R(\theta) P^T = Q \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} Q^T$

$S_k = Q \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}^j \right) Q^T$

$= Q \underbrace{\left(\frac{1}{k} \sum_{=0}^{k-1} \begin{pmatrix} e^{ij\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ij\theta} \end{pmatrix} \right)}_{L_k} Q^T$

Si $\theta \neq 0$

$$L_k[1,1] = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} e^{ij\theta} = \frac{1}{k}\,\frac{e^{ik\theta}-1}{e^{i\theta}-1} \longrightarrow 0$$

Idem pour $L_k(2,2) \longrightarrow 0$

Si $\theta = 0$ $\quad S_k = Q\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} I_2\right)Q^T$

$$= Q\left(\frac{1}{k}\,k\,I_2\right)Q^T = I_2$$

$\rightarrow$ Si $A \notin SO(\mathbb{R})$

$$A = P\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}P^T$$

$$= Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}Q^T$$

$$S_k = Q\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^j\end{pmatrix}\right)Q^T$$

$$L_k(1,1) = \frac{1}{k}\sum 1 = 1$$

$$L_k(2,2) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j = \begin{cases}\text{Si } k \text{ pair} : 0\\ \text{Si } k \text{ impair} : -\frac{1}{k} \longrightarrow 0\end{cases}$$

Donc $\underline{S_k \longrightarrow Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^T}$