

donc $v_{p,i} \rightarrow \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$D_P \rightarrow \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

$\varphi: A \rightarrow P A P^T$ linéaire en dim finie
de continue.

donc $v_p \rightarrow P \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_D P^T$

$$\text{on } (P D P^T)^2 = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T = A$$

donc $v_p \rightarrow \sqrt{A}$

$$\text{en } 628 = 685 \quad (\text{Théorème})$$

$$1: \quad B = B_1(a, n) ; B' = B_0(a, n)$$

Ma B, B' convexes ie $\forall x, y \in B, \forall t \in [0, 1],$
 $tx + (1-t)y \in B$

$$\text{Soient } (x, y) \in B^2, \begin{cases} \|x - a\| \leq n \\ \|y - a\| \leq n \end{cases}$$

$\forall t \in [0, 1],$

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - a\| &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &\leq t \|x-a\| + (1-t) \|y-a\| \\ &\leq t n + (1-t) n = n \end{aligned}$$

Par B' : le même raisonnement avec des inégalités strictes.

2): N : euclidienne $\forall u, v \in B, u \neq v, \exists u, v \in B'$

Par 1), $\exists u, v \in B$ ie $\forall t \in [0, 1],$

$$\|tu + (1-t)v\| \leq n$$

• En ce cas de l'égalité:

$$\|tu + (1-t)v - a\| = t\|u-a\| + (1-t)\|v-a\| = r$$

IT

Comme N euclidienne, égalité dans IT: $(u-a)$ et $(v-a)$ colinéaires de même sens, $(v-a) = \lambda(u-a)$

$$\rightarrow \|u-a\| = \|v-a\| = r$$

$$\text{donc } |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

donc $u = v \rightarrow$ absurde par hyp.

On a donc une inégalité stricte et $\exists u, v \in C \cap B^c$

3) $M_1 \forall A, B \subset A \subset B \Rightarrow A$ convexe.

$\forall u, v \in A \subset B, \exists u, v \in C \cap B^c$ donc $\exists u, v \in A$
de plus $u \in A$ et $v \in A$ dc $[u, v] \subset A$ et A convexe

4) M_2 N non euclidienne $\Rightarrow$ (égalité dans IT
 $\Rightarrow u, v$ colin. de même sens)

$$E = M_2(\mathbb{R}), x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } \|\cdot\|_1: \|x\|_1 + \|y\|_1 = 2$$

$$\text{et } \|x+y\|_1 = 2$$

$$A = B_0(0, 1) \cup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_x, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_y \right\}$$

$$\text{Pour } t = \frac{1}{2}, \left\| \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right\| = 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \notin B_0(0, 1)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \notin \{x, y\}$$

Donc $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \notin A$ dc A n'est pas convexe

