

622 (Antoine) Soit E endl, $(e_1, \dots, e_n)$ une BON

Soit $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ tq $\|e_k - f_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$

a) $\nexists (f_1, \dots, f_n)$ base de E

Par dimenⁿ, il suffit de voir $(f_1, \dots, f_n)$ est libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$

Soit $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k - f_k)$

$$\|v\| = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k - f_k) \right\| < \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|e_k - f_k\| \quad (i)$$

Inégalité triangulaire

Or, $(e_1, \dots, e_n)$ BON, donc $\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} \quad (ii)$

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|e_k - f_k\| \right)^2 \quad (i)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sum_{k=1}^n \|e_k - f_k\|^2$$

$< 1/n$

d'où $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left(1 - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \|e_k - f_k\|^2 \right)}_{< 1} \right) \leq 0$

$$d) \text{ On } \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \rightarrow x_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

CQFD

b) On suppose $\forall k, f_k \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

hyp $\sum_{k=1}^n f_k = 0$

on pose $\forall k \in \{1, \dots, n\}$
 $f_k = t_k + \mu$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n t_k = -n\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k$$

d'où $\left(t_k - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n t_a \right)_{1 \leq k \leq n}$ l'éc.

et $\| t_k - f_k \|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \| t_k \|^2 = \frac{1}{n}$

$$d'où \left| \| t_k - f_k \| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right|$$

(504) (Ambroise) $\left\{ \begin{array}{l} E = \mathbb{R}^4, \text{ muni du psc} \\ \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_4) \end{array} \right.$

Soit $G = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E, \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \text{et} \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \}$