Exercice 613 (Martin)

$A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ Mq $\det(A+B) \geq \det A + \det B$

Cas ① $B = I_n$

$\det(A + I_n)$

$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P^T$ (th spectral) $sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

$$\det(A + I_n) = \det(D + I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + 1)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + 1 + \overbrace{R}^{\text{reste} \geq 0}$$

$$\geq \det D + \det I_n.$$

Cas ② $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$\exists C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : B = C^2$ ↳ inversible.

$$\det(A+B) = \det(A + C^2)$$

cf page suivante

$$= \det(C^2) \times \det(\overbrace{C^{-1}AC^{-1}}^{\in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})} + I_n)$$

$$\geq \det(C^2) \times (\det(C^{-1}AC^{-1}) + 1)$$

$$= \det A + \det C^2$$

$$= \det A + \det B$$

Cas ③ : $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

$B_\varepsilon = B + \varepsilon I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$\det(A + B_\varepsilon) \geq \det A + \det B_\varepsilon$

$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{}$ $\det(A+B) \geq \det A + \det B$

$C^{-1}AC^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $X^T A X \geq 0$

$Y = C^{-1}X$

$Y^T = X^T \overbrace{(C^T)^{-1}}^{=C^{-1}}$

$Y^T A Y \geq 0 \Rightarrow X^T \underbrace{C^{-1}AC^{-1}}_{\in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} X \geq 0$

Exercice 552 (Anaïs)

$M = (\langle X^i, X^j \rangle)_{(i,j) \in [\![1, n]\!]}$ est inversible (cf exo 526)

$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc diagonalisable.

λ valeur propre de M, A vecteur propre associé à λ

$A^T M A = \lambda \underbrace{A^T A}_{\in \mathbb{R}_+^*}$

et $A^T M A = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i \overbrace{M[i,j]}^{\langle X^i, X^j \rangle} a_j$

$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \langle a_i X^i, a_j X^j \rangle$

$= \langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum a_j X^j \rangle$

$= \|x\|^2$

avec $x = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$