Exercice 598 :

a) $\boxed{A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})}$

$M \in A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$

$M^T = M = -M$ donc $M = 0$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$

S est symétrique, $\frac{X^T S X}{X^T X} \in [\alpha, \beta]$

Pour $\lambda \in Sp(A)$, $AX = \lambda X$, $X \neq 0_{n,1}$

$$X^T S X = X^T \left(\frac{A^T + A}{2}\right) X = \frac{X^T A^T X}{2} + \frac{X^T A X}{2}$$

$$= \lambda X^T X$$

donc $\lambda = \frac{X^T S X}{X^T X} \in [\alpha, \beta]$

$\boxed{\text{ccl : } Sp(A) \subset [\alpha, \beta]}$

c) $\left[\forall X \in \mathbb{R}^n, (SX - aX)^T (SX - bX) \geq 0\right] \iff \left[\forall X \in \mathbb{R}^n, ((SX)^T - aX^T)(SX - bX) \geq 0\right]$

$\iff \left[\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T (S - aI_n)(S - bI_n) X \geq 0\right]$

$(S - aI_n)(S - bI_n) = \underbrace{S^2 - (a+b)S + abI_n}_{P}$

Soit X un vecteur propre de S de valeur propre λ

$SX = \lambda X$ d'où $S^2 X = \lambda S X = \lambda^2 X$

$PX = (\underbrace{\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab}_{f(\lambda)}) X$

donc $sp(P) = \{ f(\lambda), \lambda \in sp(S)\}$

$f(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b) \geq 0$.

Exercice 436 :

Cas 1 : Si $A = \lambda I_2$ alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

donc $\dim C(A) = 4$.

Cas 2 : Si $A \neq \lambda I_2$

(A, I_2) libre dans $\mathcal{C}(A)$ donc $\dim C(A) \geq 2$.

Supposons $\dim \mathcal{C}(A) = 3$

Si A diagonalisable, $A = PDP^{-1}$

Soit $M \in \mathcal{C}(A)$, $MA = AM$ donc $MPDP^{-1} = PDP^{-1}M$

donc $P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$

donc $\dim C(A) = \dim [C(D)]$ et $D \neq \lambda I_2$ par hyp

Et $MD = DM$ donc $M \in D_2(\mathbb{C})$

Donc $\dim(C(A)) = \dim(D_2(\mathbb{C})) = 2$ $\boxed{\phi \epsilon A}$

$A \in M_2(\mathbb{C})$ donc A trigonalisable $A = PTP^{-1}$

donc $\dim C(A) = \dim[C(T)]$

$MT = TM \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & a\beta + b\alpha \\ \alpha c & c\beta + d\alpha \end{pmatrix}$

$T = \alpha I_2 + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(E_{12})$ donc $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ $\boxed{\phi \epsilon A}$

$\boxed{\text{ccl : } \dim \mathcal{C}(A) \in \{2, 4\}}$