

donc $f \in \mathcal{F}(E)$ donc f est diagonalisable

2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de $(\text{vect}(a))^\perp$

$$\forall i \in [1; n], f(e_i) = e_i$$

$$\text{puis } f(a) = a + k(a/a)a$$

$$= a(1+k)$$

$$\text{- Si } k=0, f = \text{id} \rightarrow \text{OK}$$

$$\text{- Si } k \neq 0, \text{sp}(f) = \{1; 1+k\}$$

de vecteurs propres $(a, e_1, \dots, e_n)$

3) CNS $k > -1$

Suffisant: cf compléments de cours

Nécessaire: Soit $g \in \mathcal{F}(E), g^2 = f$

donc soit D la matrice diagonale à laquelle est semblable la matrice de f
comme $g^2 = f$ et Δ celle de g

$$\text{on a } \Delta^2 = D$$

$$\text{donc } \forall i \in [1; n], (\Delta_{ii})^2 = D_{ii}$$

or si $k+1 < 0$, c'est impossible

$$\text{donc } \exists g \in \mathcal{F}(E), f = g^2 \Rightarrow 1+k > 0$$

ex 586 M. Fogebaum

$$\frac{n(n-1)}{2} = \dim T_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ donc } \dim F \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

si $\dim F > \frac{n(n-1)}{2}$ alors par Grassmann

$F \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ donc $\exists A$ une matrice nilpotente et symétrique donc diagonalisable non nulle, ce qui est faux

$$\text{d'où } \dim F = \frac{n(n-1)}{2}$$