Exercice 574 :

$$\det(A^T A) = \det(\lambda I_n + J) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \lambda+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+n) \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \lambda \end{vmatrix}$$

d'où $\det(A^T A) = (\lambda+n)\lambda^{n-1} \neq 0$

donc $A^T A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Ker}(A^T A) = \{0\}$

or $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^T A)$ donc $\boxed{A \text{ inversible.}}$

Exercice 512 : $\phi_{a,b} : M \to aM + bM^T$

a) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Dans une base adaptée :

$$\operatorname{mat}(\phi_{a,b})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a+b & & \\ & \ddots & \\ & & a+b \end{matrix}}_{\frac{n(n+1)}{2}} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} a-b & & \\ & \ddots & \\ & & a-b \end{matrix}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix}$$