

ex 564 Anna ♥

($\Rightarrow$) On note $u \in \text{ECA}$ à $A \in M_n(\mathbb{R})$

on suppose $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc $u \in A(E)$ donc $\forall z \in E, (u(z)|z) = 0$

Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$.

On note $E_1, \dots, E_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

et $B = (\underbrace{P^{-1}E_1, \dots}_{a_1}, \underbrace{P^{-1}E_n}_{a_n})$ est une BON car $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

$$P^{-1}AP = \text{mat}_B(u)$$

$\forall i \in [1; n] (u(a_i)|a_i) = 0$ donc $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle

($\Leftarrow$) Si $\forall P \in O_n(\mathbb{R}), P^{-1}AP$ est de diagonale nulle alors $\forall B$ BON de E ,
 $\text{mat}_B(u)$ est de diagonale nulle

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est une famille libre, qu'on complète par le TBNI

en $B_x = \left(\frac{x}{\|x\|}, e_2, \dots, e_n\right)$ une BON

$P_x = P_{B' \rightarrow B_x}$ $\text{mat}_{B_x}(u) = P_x^{-1}AP_x$ à diagonale nulle par hypothèse

$$\left(u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \middle| \frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \quad \text{donc } (u(x)|x) = 0 \quad \text{donc } u \in A(E)$$

ex 511 Raphaël Berg

1) Soient $(x, y) \in E^2$

$$(f(x)|y) = (x + k(x/a)a|y) = (x|y) + k(x/a)(a|y)$$

$$= (x|y) + (x|k_a(a|y))$$

$$= (x|y + k(a|y)a)$$

$$= (x|f(y))$$