

Exercice 538: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

a) Mg $\langle X|Y \rangle = X^T A Y$ est ps

symétrique: $\langle X|Y \rangle = \underbrace{X^T A Y}_{\in \mathbb{R}} = (X^T A Y)^T = Y^T A X = \langle Y|X \rangle$

linéarité: $\langle X + \lambda X' | Y \rangle = (X^T + \lambda X'^T) A Y = \langle X|Y \rangle + \lambda \langle X'|Y \rangle$

positivité: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\exists (P, D) \in O(n) \times D_n(\mathbb{R}^+)$, $A = P D P^T$

$$\langle X|X \rangle = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X)$$

$$P^T X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\langle X|X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \geq 0.$$

$$\langle X|X \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i^2 \lambda_i = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0_{n,1}$$

donc c'est un produit scalaire.

b) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), D \in D_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^T P$
 $B = P^T D P$

donc $A^{-1}B$ diagonalisable.

Autre méthode: mg $A^{-1}B$ est symétrique pour le ps de a).

$$\langle Y | A^{-1} B X \rangle = Y^T A A^{-1} B X = Y^T B X = \underbrace{Y^T B^T X}_{B \in S_n(\mathbb{R})} = X^T B Y = \langle X | A^{-1} B Y \rangle$$

Donc il existe une B.O.N pour le ps de vecteurs propres de $A^{-1}B$

C.L.: $A^{-1}B$ diagonalisable.