Exercice 521.

1. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Supposons $A \in GL_n(\mathbb{R})$

A inversible $\Leftrightarrow rg\, A = n$

$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ et $\det(A) \neq 0$

Donc n pair

Ccl : $rg(A)$ pair

2. Soit $x \in \mathrm{Im}\, A \cap \ker A$.

Soit u l'EC4 à A.

$\exists y \in E$, $u(y) = x$. Disposons d'un tel y.

$$(x \mid u(y)) = -(u(x) \mid y) = 0$$

donc $(x \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ccl : $\mathrm{Im}\, A \oplus \ker A$

3. On considère $u|^{\mathrm{Im}\, A}_{\mathrm{Im}\, A}$ car $u(\mathrm{Im}\, A) \subset \mathrm{Im}\, A$

Soit $x \in \mathrm{Im}\, A$ tq $u(x) = 0$

$x \in \ker A \cap \mathrm{Im}\, A$ donc $x = 0$

donc $u|^{\mathrm{Im}\, A}_{\mathrm{Im}\, A}$ injective donc bijective

Ccl : $u|^{\mathrm{Im}\, A}_{\mathrm{Im}\, A} \in GL(\mathrm{Im}\, A)$

4. On considère une base $\mathcal{B}$ ON adaptée à $\ker(A) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A)$

En effet : $\mathrm{Im}(A) \perp \ker(A)$

dém : Soit $(x, y) \in \ker(A) \times \mathrm{Im}(A)$, $y = u(z)$

$$(x \mid y) = (x \mid u(z)) = -(u(x) \mid z) = 0$$

$$mat(u)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} u(\mathrm{Im}A) & u(\ker A) \\ C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $mat(u)_{\mathcal{B}}$ antisymétrique donc C antisymétrique et inversible

et $C = mat\left(u \,|\, {\mathrm{Im}A \atop \mathrm{Im}A}\right)$ et $rg(mat(u)_{\mathcal{B}}) = rg(C)$ pair

Ccl : $rg\,A$ pair

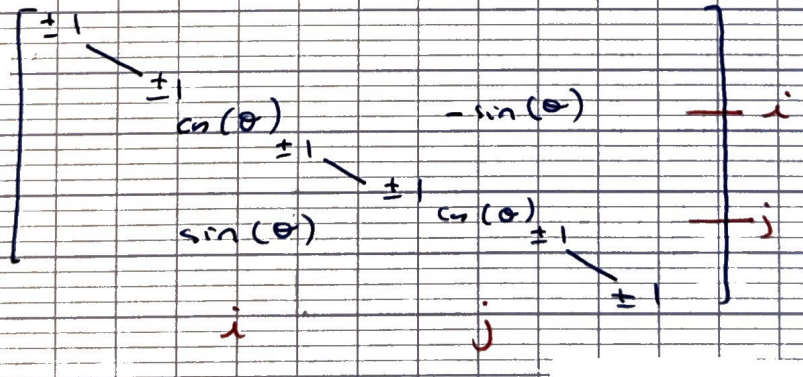
Exercice 582 : $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n} = \sum_{1\le i,j\le n}^{} (A)_{ij} E_{ij} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$R(\theta) + R(-\theta) + S(\theta) + S(-\theta) = \begin{bmatrix} 4\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\in \Theta_2(\mathbb{R})$

Pour $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in]-4,4[$, $\exists (R_1, R_2, R_3, R_4) \in \Theta_2(\mathbb{R})^4$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$



En faisant la même opération

$$R(\theta) - R(-\theta) + S(\theta) - S(-\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

on obtient $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$