

2^e cas: $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B = C^2$

$$B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C^2 - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

$$C^2 - A = ([I_n - \underbrace{C^{-1}AC^{-1}}_{\tilde{A}}]) C$$

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

$$(AX|X) \geq 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (C^{-1}A \underbrace{C^{-1}X}_Y | X) = (AC^{-1}X | C^{-1}X) \quad \text{car } C^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$= (AY | X) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{C^{-1}AC^{-1}}_{=\tilde{A}} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

$$C^2 - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

pas fini

Exe 515 Raphaël Burg

a) Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une BON de H

on la complète en $(e_1, \dots, e_n)$ BON de E

$$\text{or } \text{Ker}(s - \text{id}_E) = H$$

$$\forall i \in [2, n], s(e_i) = e_i \quad \text{et } s(e_1) \neq e_1$$

$$s \in O(E) \text{ donc } (s(e_1), \dots, s(e_n)) \text{ BON de } E$$

$$\text{Donc } s(e_1) \in \text{vect}(e_1)$$

$$\text{et } \|s(e_1)\| = 1 \text{ et } s(e_1) \neq e_1$$

$$\text{donc } s(e_1) = -e_1$$

2) $a = e_1$

3) Si $s(x) = -(x|e_1)e_1 + \sum_{i=2}^n (x|e_i)e_i$

cela fonctionne sur $(e_1, \dots, e_n)$ donc OK

$$s(x) = x - 2(x|e_1)e_1$$