

ex 564 Anna ♥

($\Rightarrow$) On note $u \in \text{ECA}$ à $A \in M_n(\mathbb{R})$

on suppose $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc $u \in A(E)$ donc $\forall z \in E, (u(z)|z) = 0$

Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$.

On note $E_1, \dots, E_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

et $B = (\underbrace{P^{-1}E_1}_{a_1}, \dots, \underbrace{P^{-1}E_n}_{a_n})$ est une BON car $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

$$P^{-1}AP = \text{mat}_B(u)$$

$\forall i \in [1; n] (u(a_i)|a_i) = 0$ donc $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle

($\Leftarrow$) Si $\forall P \in O_n(\mathbb{R}), P^{-1}AP$ est de diagonale nulle alors $\forall B$ BON de E ,
 $\text{mat}_B(u)$ est de diagonale nulle

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est une famille libre, qu'on complète par le TBNI

en $B_x = \left(\frac{x}{\|x\|}, e_2, \dots, e_n\right)$ une BON

$P_x = P_{B' \rightarrow B_x}$ $\text{mat}_{B_x}(u) = P_x^{-1}AP_x$ à diagonale nulle par hypothèse

$$\left(u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \middle| \frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \quad \text{donc } (u(x)|x) = 0 \quad \text{donc } u \in A(E)$$

ex 511 Raphaël Berg

1) Soient $(x, y) \in E^2$

$$(f(x)|y) = (x + k(x/a)a|y) = (x|y) + k(x/a)(a|y)$$

$$= (x|y) + (x|k_a(a|y))$$

$$= (x|y + k(a|y)a)$$

$$= (x|f(y))$$

donc $f \in \mathcal{F}(E)$ donc f est diagonalisable

2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de $(\text{vect}(a))^\perp$

$$\forall i \in [1; n], f(e_i) = e_i$$

$$\text{puis } f(a) = a + k(a/a)a$$

$$= a(1+k)$$

$$\text{- Si } k=0, f = \text{id} \rightarrow \text{OK}$$

$$\text{- Si } k \neq 0, \text{sp}(f) = \{1; 1+k\}$$

de vecteurs propres $(a, e_1, \dots, e_n)$

3) CNS $k > -1$

Suffisant: cf compléments de cours

Nécessaire: Soit $g \in \mathcal{F}(E), g^2 = f$

donc soit D la matrice diagonale à laquelle est semblable la matrice de f
comme $g^2 = f$ et Δ celle de g

$$\text{on a } \Delta^2 = D$$

$$\text{donc } \forall i \in [1; n], (\Delta_{ii})^2 = D_{ii}$$

or si $k+1 < 0$, c'est impossible

$$\text{donc } \exists g \in \mathcal{F}(E), f = g^2 \Rightarrow 1+k > 0$$

ex 586 M. Fogebaum

$$\frac{n(n-1)}{2} = \dim T_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ donc } \dim F \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

si $\dim F > \frac{n(n-1)}{2}$ alors par Grassmann

$F \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ donc $\exists A$ une matrice nilpotente et symétrique donc diagonalisable non nulle, ce qui est faux

$$\text{d'où } \dim F = \frac{n(n-1)}{2}$$