

ex 505 Raphaël Berg

$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\forall (i,j) \in [1;n]^2, e_i^T (A e_j) = e_i^T C_j(A) = a_{ij}$$

$$e_i^T (A e_i) = a_{ii}$$

$\varphi(X,Y) \mapsto X^T A Y$ est bilinéaire, symétrique et positive

soient $(i_0, j_0) \in [1;n]^2$ tels que $a_{i_0, j_0} = \max_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$

Par Cauchy-Schwarz, $|\varphi(e_i, e_j)| \leq \sqrt{\varphi(e_i, e_i) \varphi(e_j, e_j)}$

$$\text{d'où } |a_{i_0, j_0}| \leq \sqrt{a_{i_0, i_0} a_{j_0, j_0}}$$

soient $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^2$

si $\begin{cases} a > b \\ |a| > c \end{cases}$ alors $a^2 > bc$ donc $|a| > \sqrt{bc}$

d'où $a_{i_0, j_0} \leq a_{i_0, i_0}$ ou $a_{i_0, j_0} \leq a_{j_0, j_0}$

On $a_{i_0, j_0} \geq a_{i_0, i_0}$ et $a_{i_0, j_0} \geq a_{j_0, j_0}$

donc $i_0 = j_0$ donc $\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$