

ex 539 Amairis

$A \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\exists C \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = C^2$ (cf compléments de cours)

$$AB = C^2 B = C(CBC)C^{-1} \quad (C \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}))$$

donc AB est semblable à CBC

$$(CBC)^T = C^T B^T C^T = C(-B)C = -CBC \quad \text{donc } CBC \in A_n(\mathbb{R})$$

donc CBC est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ d'après les compléments de cours

donc AB est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

ex 503 Raphaël Berg

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\chi_M(x) = x^2 - (a+c)x + (ac - b^2)$$

χ_M scindé sur $\mathbb{C}$ donc admet une racine double ou 2 racines distinctes

- si χ_M a deux racines distinctes, χ_M est SRS donc M est diagonalisable

- si χ_M a une racine double

$$\Delta = 0 \quad \text{soit } \Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$$

si $b = 0$ et $\Delta = 0$, $a = c$ donc $M = aI_2$ diagonalisable

donc une condition nécessaire est $b \neq 0$ et $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$

Montrons qu'elle est suffisante.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ et $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$

$$\chi_M = (x - \lambda)^2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

soit $b \neq 0$ donc $M \neq \lambda I_2$ donc M n'est pas diagonalisable