

488 Martin

On a donc M semblable à $2^p M$ $p \in \mathbb{Z}$

$$M = P 2^p M P^{-1} \Rightarrow X_M = X_{2^p M}$$

$$\Rightarrow \det(X I_n - M) = \det(X I_n - 2^p M)$$

Supposons qu'on dispose de $\lambda \neq 0$ valeur propre de M

$$\text{donc } 2^p \lambda \in \text{sp}(M) \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

absurde

donc $\lambda = 0$ et M est nilpotente

Réciproque ?

M nilpotente d'indice $n \Leftrightarrow M$ semblable à :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

DS3 : M nilp d'indice $p \Leftrightarrow M$ semblable à :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_k} \end{pmatrix} = T = \text{Mat}(u_k)$$

Or, $2M$ semblable à :

$$\begin{pmatrix} J_{2p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{2p_k} \end{pmatrix} = 2T$$

$$\text{Mat}(v)(e_1, 2e_2, 4e_3, \dots, 2^{n-1}e_n) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= 2T$$

T et $2T$ are semblable
 d'où M et $2M$ aussi.