

476 (Diap)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} (n)$$

Rg Symétrique
donc diagonalisable

n = pair

$n = 2p$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{rg}(X) = n, \\ \dim(\ker(X)) = 0 \end{cases}$$

$X^2 = 2X$, donc $\underbrace{x(x-2)}_{\text{SARS}}$ annule $X \Rightarrow X$ diagonalisable

$$Y + 0 \quad X \cdot Y = 2Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_n = 2y_2 \\ y_{n-1} + y_{n+1} = 2y_n \\ y_n + y_{n+1} = 2y_{n+1} \\ \vdots \\ y_1 + y_{2n} = 2y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{2n} = y_2 \\ y_{2n-1} = y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} = y_n \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

d'où $\ker(X) \cap \ker(X - 2I_n) = \{0\}$

est une famille libre
de vect. pr. de X

d'ici X semblable à

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Cas n impair :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

relation sur les colonnes de X :

$$C_1 = C_n, \dots, C_{\frac{n-1}{2}} = C_{\frac{n+1}{2}} \text{ donc } \dim(\ker(X)) \geq \frac{n-1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(X - \lambda E_n) \text{ d'où } \dim \ker(X - \lambda E_n) \geq \frac{n-1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(X - I_n) \text{ donc } \dim \ker(X - I_n) \geq 1 \text{ d'où } X \text{ est diagonalisable}$$

527 (Lucas) 1) $A \in L_n(\mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Sp}(A) \cap \mathbb{R} \subset \{0\}$ (généralisé d'ici)

$$\text{on : } X \in \ker(A - I_n) \rightarrow AX = -X$$

$$\rightarrow X^T A^T = -X^T$$

$$\rightarrow X^T A = -X^T$$

$$\text{alors } X^T (AX) = -X^T X$$

$$(X^T A) X = -X^T X$$

$$\text{d'où } \|X\|^2 = -\|X\|^2$$

$$\text{d'où } \underline{X = 0}$$

$$2) M = (I_n + A)^{-1} (I_n - A), \quad M^T = (I_n - A)^T ((I_n + A)^T)^{-1}$$

$$MM^T = (I_n + A)^{-1} (I_n - A) \underbrace{(I_n + A) (I_n - A)^{-1}}_{\text{commutatif}} = I_n$$