

Si $x \in]-1; 0[$ alors

$$0 \leq a^h < a < 1 \quad \text{donc } a - a^h - 1 < 0$$

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $P(x) < 0$

Dans $\mathbb{C}$, on note $(x_1, \dots, x_p)$ de multiplicité

$(m_1, \dots, m_p)$ les valeurs propres réelles de

A et $(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_p, \bar{\alpha}_p)$ et

$(m_1, \dots, m_p)$ leur multiplicité

$$\text{d'où } \det(A) = \prod_{i=1}^p x_i^{m_i} \prod_{i=1}^p (\alpha_i \bar{\alpha}_i)^{m_i} > 0$$

$\parallel$
 $|\alpha_i|^2$

Ex 75 Nicolas

$$\text{On a } \begin{cases} A^2 \times A = A \times A^2 \\ A^2 \text{ dy à spectre simple} \end{cases}$$

donc A^2 et A codiagonalisables

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \begin{cases} A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} P \\ A = P^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{n} \end{pmatrix} P \end{cases}$$

$$\text{Puis } P = (P_1 \dots P_n) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, P_k = \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ \vdots \\ p_{n,k} \end{pmatrix} = 0$$

$$A^2 P_h = k P_h \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \xrightarrow{x} \\ 2 & \downarrow \\ 0 & \searrow \\ & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,h} \\ 1 \\ p_{n,h} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_{1,h} \\ 1 \\ p_{n,h} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} n p_{n,h} = k p_{n,h} \\ (n-1) p_{n-1,h} + a_{n-1,n} p_{n,h} = k p_{n-1,h} \\ (n-2) p_{n-2,h} + a_{n-2,n-1} p_{n-1,h} + a_{n-2,n} p_{n,h} = k p_{n-2,h} \\ \vdots \end{cases}$$

Par réc. on peut moy $\forall j > h, p_{j,h} = 0$

Remarque M. Fagebaum :

Vect $(e_1, \dots, e_n)$ stable par A^2
 $\cup \ell' \in \ell \cap A^2$

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\text{mat}} \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$\cup \text{dy}$

$(x_1, \dots, x_n)$ base de vecteurs propres de u

$$\cup (e_1, \dots, e_n) \quad \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\text{mat}} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2^{ème} Méthode (M. Fagebaum)

$$A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \nabla \\ 0 & n \end{pmatrix} P \quad A = P^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & \nabla \\ 0 & \pm \sqrt{n} \end{pmatrix} P$$

$e_1, \dots, e_n \in \{-1, 1\}$

polynôme d'interpolation de Lagrange (cf 4.2.2)

$$\exists Q \text{ tq } \begin{cases} Q(1) = e_1 \\ Q(2) = e_2 \sqrt{2} \\ \vdots \\ Q(n) = e_n \sqrt{n} \end{cases}$$

$$Q(\text{diag}(1, 2, \dots, n)) = \text{diag}(E_1, \dots, E_n \sqrt{n})$$

$$\Rightarrow Q(A^2) = A$$

$$\Rightarrow A \in \mathbb{R}[A^2]$$

$$\text{Or, } A^2 \in T_n^+(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A \in T_n^+(\mathbb{R})$$

[5-16] Quentin

Par théorème spectral $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dg :

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$$

↓
produit scalaire
canonique

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

[472] Nicolas

$$a) \text{sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(u)$$

$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(u)$$

$$P(X) = (X - (\alpha + i\beta))(X - (\alpha - i\beta))$$

$$\deg P \geq 2$$

$$\text{et } \text{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$$

$$A = \text{Mat}_{\mathbb{C}}(u)$$