

$$Q(\text{diag}(1, 2, \dots, n)) = \text{diag}(E_1, \dots, E_n \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow Q(A^2) = A$$

$$\Rightarrow A \in \mathbb{R}[A^2]$$

$$\text{Or, } A^2 \in T_n^+(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A \in T_n^+(\mathbb{R})$$

[5-16] Quentin

Par théorème spectral $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dg :

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$$

↓
produit scalaire
canonique

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

[472] Nicolas

$$a) \text{sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(u)$$

$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(u)$$

$$P(X) = (X - (\alpha + i\beta))(X - (\alpha - i\beta))$$

$$\deg P \geq 2$$

$$\text{et } \text{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$$

$$A = \text{Mat}_{\mathbb{C}}(u)$$

$$\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \text{ donc } \exists z \in \mathbb{C}^n \text{ tq } Az = \lambda z$$

$$z = x + iy$$

$$Az = A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \alpha y + \beta x \end{cases}$$

• Mq (x, y) est libre

$$z = x + iy, \quad Az = \lambda z$$

$$\bar{z} = x - iy, \quad A\bar{z} = \bar{\lambda} \bar{z} \quad (A\bar{z} = \overline{\lambda z})$$

Comme $E_{\lambda} \oplus E_{\bar{\lambda}} : (z, \bar{z})$ libre

$$\text{On, } (x, y) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

Donc (x, y) libre dans $\mathbb{R}$, rien $(z, \bar{z})$ libre

$$B = (x, y)$$

On complète B en une base de E

On a :

$$\text{Mat}_B(A) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ -\beta & \alpha & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \\ \end{pmatrix}$$

c) Si $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, il existe λ vecteur propre
et $\mathbb{R}x$ stable

Si $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, $\exists$ 1 plan stable
 $\hookrightarrow \text{Vect}(x, y)$