

Nécessairement
$$\begin{cases} P(\alpha_1) = \lambda \\ \alpha_2 P'(\alpha_1) = \alpha \end{cases}$$

Posons : $P(X) = X^2 + \lambda$

Par l'absurde, si $P(M) = A$

$$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} Q$$

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q$$

On a $P(\alpha_1) = \lambda$ donc $\alpha_1 = 0$

donc $P'(\alpha_1) = P'(0) = 0$ et $\alpha \neq 0$

donc $\alpha \neq \alpha_2 P'(\alpha_1)$

Remarque M. Fagebauer :

$$P = X^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow P(M) = M^2 + \lambda I_2 = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui n'a pas de solution}$$

445

Amis

$$M^T = I_3 - M^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= I_3 - (M^2)^T = I_3 - (M^T)^2 \\ &= I_3 - (I_3 - M^2)^2 \\ &= 2M^2 - M^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M^4 + M - 2M^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 P(X) &= X^4 - 2X^2 + X \text{ annule } M \\
 &= X(X^3 - 2X + 1) \\
 &= X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \text{ S.A.R.S.} \Rightarrow M \text{ dy.}$$

$$M = P D P^{-1} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad P \in GL_3(\mathbb{R})$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \operatorname{sp}(M) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (\operatorname{tr} M = 0) \end{cases} \quad (2)$$

M^T est un polynôme en M donc commute avec M

$\Rightarrow M$ et M^T sont simultanément diagonalisables

$$M^T = P \Delta P^{-1} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow M = [0]$$

ou

non car $[0]$ n'est pas solution

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \alpha \\ \lambda_3 = \beta \end{cases}$$

$$\text{d'où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$M^T = I_3 - M^2 = P(I_3 - D^2)P^{-1}$$

$$\text{d'où } M^T = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 1-\beta^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

α et β sont solutions de $X^2 + X - 1 = 0$

$$\text{donc } \begin{cases} 1-\alpha^2 = \alpha \\ 1-\beta^2 = \beta \end{cases}$$

$$M^T = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{sp}(M^T) = \{0, \alpha, \beta\}$$

$\neq$

$$\text{sp}(M) = \{1, \alpha, \beta\}$$

absurde $\rightarrow$ pas de solution

Ex 60 Nicolas

$$\text{rg } A = 2 \quad \text{donc} \quad \dim E_0 = n-2$$

Donc l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A est $\geq n-2$

$$\Rightarrow X^{n-2} \mid \chi_A$$

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \alpha X^{n-2}$$

$$M \text{ diagonalisable} \Rightarrow \exists P, \quad M = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

On a $m_0 \geq n-2$ donc on peut prendre

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$