

$$\det(A+S) = \det(A + (PA)(PA)^T) = \det(PA) \det((PA)^{-1} A (PA^{-1})^T + I_n) \times \det((PA)^T)$$

$\left\{ \begin{array}{l} A \in GL_n(\mathbb{R}), P \in GL_n(\mathbb{R}) \\ P \in GL_n(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

$$= \det S \times \det \underbrace{((PA)^{-1} A (PA^{-1})^T + I_n)}_{=B}$$

$\begin{array}{c} ? \\ ES_n^+ \\ > 0 \end{array}$
 $\text{car } B : \geq 1$

$$(BAB^T)^T = BA^T B^T = -BAB^T$$

$$\text{donc } BAB^T \in A_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A+S) \geq 1 \det S.$$

$$?^{\text{can}}: \text{ Si } S \in ES_n^+(\mathbb{R})$$

$$\varepsilon > 0 \quad \det(A+S+\varepsilon I_n) \underset{\substack{ES_n^+(\mathbb{R}) \\ \varepsilon \rightarrow 0}}{\geq} \det(S+\varepsilon I_n) \underset{\substack{?^{\text{can}} \\ \varepsilon \rightarrow 0}}{\geq}$$

$$\det(A+S) \geq \det S$$

par l'éc. de det.

Exercice 431 (Nicolas)

$f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable

$g \in \mathcal{L}(E)$

$u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_i \circ g = f \circ u_i \\ \bigwedge_{i=1}^n \ker u_i = \{0\}. \end{array} \right.$$

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}, u_i \circ g^k = f^k \circ u_i$
 car $n=0$ OK.

supposons $H(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_i \circ g^{k+1} &= u_i \circ g^k \circ g \\ &= f^k \circ u_i \circ g \\ &= f^{k+1} \circ u_i = f \circ u_i \end{aligned}$$

d'où $H(\mathbb{R}^n)$.

CEL: $\forall k \in \mathbb{N}, u_i \circ g^k = f^k \circ u_i$

par linéarité, $\forall P \in \mathcal{H}[X]$, on a: $u_i \circ P(g) = P(f) \circ u_i$.

f diagonalisable donc $\exists P S A R S$ tq $P(f) = 0_{\mathbb{R}(E)}$

d'où $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_i \circ P(g) = \underbrace{P(f) \circ u_i}_{= 0_{\mathbb{R}(E)}} = 0_{\mathbb{R}(E)}$

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_i \circ P(g) = 0_{\mathbb{R}(E)}$

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Im}(P(g)) \subset \text{Ker}(u_i)$

d'où: $\{0\} \subset \text{Im}(P(g)) \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(u_i) = \{0\}$

donc $P(g) = 0_{\mathbb{R}(E)}$ avec $P S A R S$ donc g diagonalisable.

Exercice 525 (Ulysses)

1. Soit $(v_1, \dots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$

et $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ et $i \neq j, \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p x_i v_i, \sum_{j=1}^p x_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p x_i^2 \|v_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \underbrace{(x_i x_j - |x_i x_j|)}_{\leq 0} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\leq 0} \geq 0$$